

Астраханский государственный университет

Ю. Ю. Тарасевич, И. В. Водолазская

Исследование ангармонического осциллятора методом компьютерного моделирования

Методическое пособие

Астрахань 2005

Ю. Ю. Тарасевич, И. В. Водолазская Исследование ангармонического осциллятора методом компьютерного моделирования. Методическое пособие. – Астрахань, АГУ, 2005.

Оригинал-макет подготовил Ю.Ю. Тарасевич в пакете $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$

Цель работы: исследование нелинейных колебаний методом компьютерного моделирования.

Оборудование: компьютер типа IBM PC, Mathcad.

Краткая теория.

Как хорошо известно, гармонический осциллятор — это система, уравнение движения которой описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где x — величина, совершающая колебания, ω_0 — циклическая частота.

В зависимости от природы гармонического осциллятора и характера колебательного процесса под x могут пониматься самые разнообразные физические величины, например, смещение тела из положения равновесия, угол отклонения, заряд в колебательном контуре и т. д.

Следует, однако, понимать, что гармонический осциллятор — всего лишь модель, более или менее точно описывающая реальный процесс. Эта модель оказывается весьма удобной в целом ряде случаев, но далеко не всегда пригодна для описания сложных колебательных процессов, встречающихся в природе и технике.

Давайте рассмотрим некоторые примеры, выходящие за рамки модели гармонического осциллятора.

Пример 1. *Большие колебания физического маятника.*

Уравнение колебаний физического маятника имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$, m — масса маятника, J — его момент инерции относительно оси вращения, l — расстояние от точки подвеса до центра масс, g — ускорение свободного падения, φ — угол отклонения из положения равновесия. Разложим $\sin \varphi$ в ряд Тейлора

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (3)$$

При малых углах отклонения ($\varphi < 10^\circ$) $\sin \varphi \approx \varphi$ уравнение (2) переходит в уравнение гармонического осциллятора (1). Для уточнения решения можно было учесть следующий член в разложении (3), тогда

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \right) = 0. \quad (4)$$

Полученной уравнение может быть решено, например, методами теории возмущений [1, 2].

Перепишем уравнение (4) в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3. \quad (5)$$

Если углы отклонения φ не очень велики, то правую часть уравнения (5) можно считать малой поправкой (возмущением). При возмущении равно нулю уравнение (5) переходит в (1) и его решение

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t.$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t)$ — поправка к невозмущенному решению. Подставим (7) в (5)

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= \\ &= \frac{\omega_0^2}{6} (\varphi_0^3 \sin^3(\omega_0 t) + 3\varphi_1 \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + 3\varphi_1^2 \varphi_0 \sin(\omega_0 t) + \varphi_1^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая малость поправки φ_1 , пренебрежем в правой части уравнения (6) слагаемыми, в которые входит φ_1 .

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 \approx \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi_0^3 \sin^3(\omega_0 t). \quad (7)$$

Поскольку

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha), \quad (8)$$

решение уравнения (7) следует искать в виде

$$\varphi_1 = A \sin \omega_0 t + B \sin 3\omega_0 t.$$

Таким образом, решением возмущенного уравнения является суперпозиция колебаний с частотами ω_0 и $3\omega_0$. Логично было бы предположить, что и решение уравнения (2) будет содержать набор высших гармоник. Это наиболее важная характерная черта нелинейных колебаний.

Найдем период больших колебаний, используя закон сохранения энергии для незатухающих колебаний $W_k + W_p = W$. Для уравнения (2) закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = W. \quad (9)$$

Тогда период колебаний можно вычислить по формуле

$$T = 2 \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J}(W - mgl(1 - \cos \varphi))}}. \quad (10)$$

Учтя, что $W = mgl(1 - \cos \varphi_{\max})$, имеем

$$T = \sqrt{\frac{2J}{mgl}} \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}}. \quad (11)$$

Таким образом $T = T(\varphi_{\max})$. Если угол φ_{\max} не очень велик, то $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, $\cos \varphi_{\max} \approx 1 - \varphi_{\max}^2/2$ и (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{\frac{J}{mgl}} \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_{\max}^2 - \varphi^2}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{J}{mgl}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \Big|_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае не очень больших колебаний мы получили обычную формулу для периода колебаний. Период колебаний не зависит от амплитуды — колебания изохронны.

Для произвольных углов формула (11) может быть приведена к виду

$$T = 4\sqrt{\frac{J}{mgl}} K\left(\sin^2 \frac{\varphi_{\max}}{2}\right), \quad (13)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

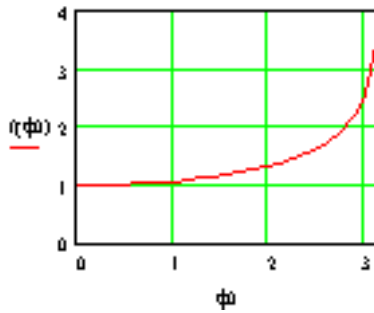
Выбирая верхний предел интеграла (10) произвольно, мы можем получить зависимость $t(\varphi)$, которая, естественно, так же выражается через эллиптические интегралы. Функции, обратные к эллиптическим интегралам, называются эллиптическими функциями. Через эллиптические функции может быть выражена зависимость $\varphi(t)$.

Уравнение (2) описывает ангармонический осциллятор. Его решение можно представить в виде суперпозиции нескольких гармонических решений. Результаты решения уравнения (2) представлены на рис. 1.

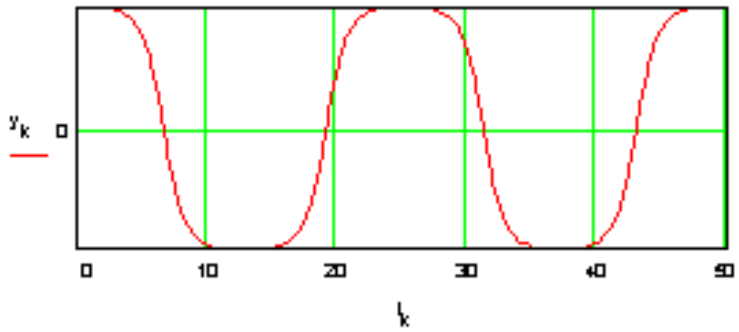
Пример 2. *Большие колебания пружинного маятника.*

Как известно, закон Гука выполняется только при небольших деформациях. В произвольном случае $F_{\text{упр}} = f(x)$, где $f(x)$ — некоторая функция. Если разложить функцию в ряд Тейлора, то

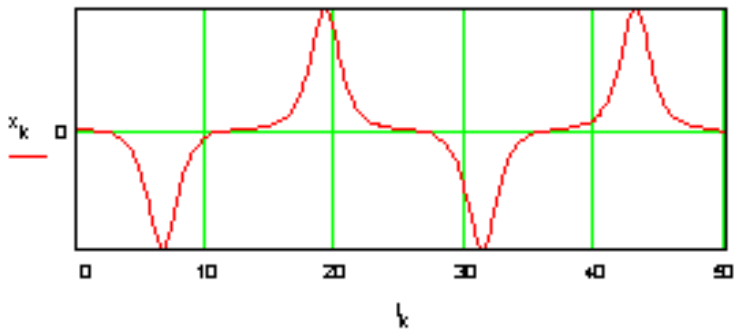
$$f(x) = kx + k_1x^3 + k_2x^5 + \dots$$



а)



б)



в)

Рис. 1. а) представлено отношение T/T_0 для различных значений амплитуды колебаний φ_0 (в радианах), где T_0 — период колебаний гармонического осциллятора. б) зависимость $x(t)$; в) зависимость $x'(t)$

($f(x)$ — нечетная функция, т. к. сила упругости меняет знак при изменении направления деформации на противоположное, следовательно, разложение должно содержать только нечетные степени). Если ограничиться первыми двумя членами разложения, то уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x + \frac{k_1}{k}x^3) = 0. \quad (14)$$

Сравните с уравнением (4).

Пример 3. *Колебательный контур с переменной индуктивностью.*

Известно, что индуктивность соленоида с магнитным сердечником зависит от силы тока в соленоиде $L = L(I)$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (15)$$

Поскольку, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то циклическая частота зависит от силы тока. Если считать, что токи в катушке малы, то можно считать зависимость почти линейной $L = L_0(1 + \alpha I)$.

$$\ddot{q} + \frac{1}{L_0C}(1 - \alpha \dot{q})q = 0. \quad (16)$$

Пример 4. *Движение с большой скоростью в вязкой среде.*

Известно, что при движении в жидкости или газе с малыми скоростями сила сопротивления пропорциональна скорости (ламинарное движение, сила вязкого трения преобладает над силой лобового сопротивления). При движении с большими скоростями определяющую роль играет сила лобового сопротивления и сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

Для большого диапазона скоростей силу сопротивления можно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{сопр.}} = -k_1\vec{v} - k_2\vec{v}v, \quad (17)$$

причем $k_1 \gg k_2$.

С учетом силы сопротивления (17) уравнение движения гармонического осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta(\dot{x} + \alpha\dot{x}|\dot{x}|) + \omega_0^2x = 0. \quad (18)$$

Фазовые траектории

Состояние любой системы может быть представлено в виде точки в фазовом пространстве — пространстве координат и импульсов (скоростей) материальных точек, входящих в состав системы. Действительно,

задавая координаты и скорость материальной точки, мы однозначно определяем ее состояние. Эволюция системы (т.е. ее изменение со временем) будет изображаться в виде кривой в фазовом пространстве — фазовой траектории. Фазовое пространство, заполненное непересекающимися фазовыми траекториями, называется фазовым портретом системы.

Существуют методы, позволяющие определить характер фазовых траекторий, не решая дифференциальное уравнение. Анализом поведения фазовых траекторий занимается раздел математики, носящий название теории динамических систем.

В том случае, когда точное решение дифференциального уравнения не может быть найдено, анализ поведения системы проводится на основе фазового портрета.

В частности, фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс (рис. 2). Действительно, решение уравнения (1) может быть записано в виде $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Тогда выражение для скорости $v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Исключая время, получаем зависимость $v(x)$: $x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = 1$.

Автоколебания.

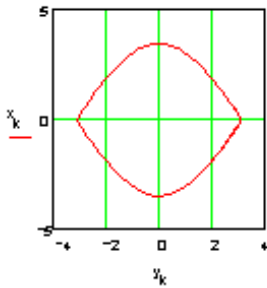
Самоподдерживающиеся колебания в диссипативной среде, когда осциллятор сам регулирует подвод энергии из внешнего источника, называются автоколебания. Характерная особенность автоколебаний — отсутствие внешнего периодического воздействия. Примерами систем, совершающих автоколебания, могут служить скрипичная струна, ламповый генератор, механические часы и многое другое. В частном случае, когда изменения в системе накапливаются относительно медленно, а возврат системы в исходное состояние происходит быстро, скачкообразно, автоколебания называются релаксационными. Весьма распространенным уравнением автоколебательного процесса является уравнение Ван дер Поля, которое обычно записывается в безразмерном виде

$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + x = 0. \quad (19)$$

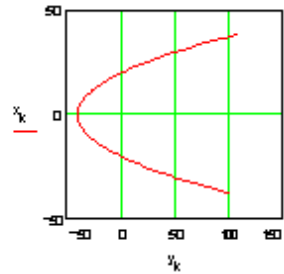
(Релаксационные колебания соответствуют большим значениям параметра. $\varepsilon \gg 1$ вывод уравнения (19) можно найти в [3, 4].

Параметрический резонанс

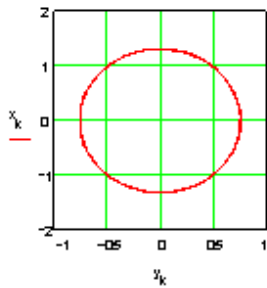
Вспомните, как дети раскачивают качели-лодочку. Когда качели проходят нижнюю точку, человек приседает (центр масс смещается вниз, момент инерции возрастает, приведенная длина физического маятника — качелей увеличивается). Когда качели идут вверх, человек встает (центр



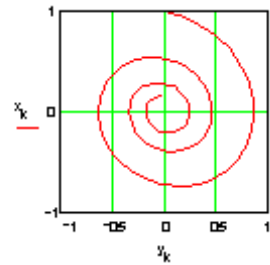
а)



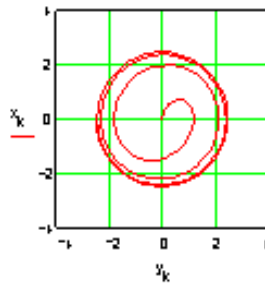
б)



в)



г)



д)

Рис. 2. а) Колебательное движение, т. к. система по истечении определенного времени возвращается в исходное состояние. б) Аперриодическое движение. в) Фазовая траектория гармонического осциллятора. г) Фазовая траектория в случае затухающих колебаний гармонического осциллятора — стягивающаяся спираль. д) В случае установления вынужденных колебаний — разворачивающаяся спираль. Предельный эллипс соответствует установившимся колебаниям

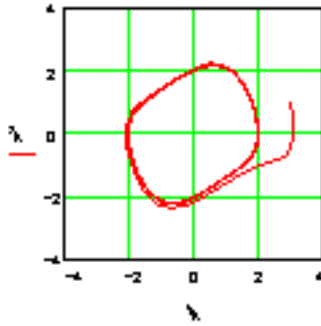


Рис. 3. Фазовая траектория при автоколебаниях

масс поднимается, момент инерции уменьшается, приведенная длина становится меньше). Таким образом, увеличение амплитуды колебаний происходит не за счет действия внешней силы, а за счет изменения параметров самой колеблющейся системы. Явление возрастания амплитуды колебаний при периодическом изменении какого-либо параметра колеблющейся системы называется параметрическим резонансом. Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (20)$$

Особый интерес имеет случай, когда $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \varepsilon \cos 2\omega_0 t)$.

Решение уравнения (20) приводит к специальным функциям, называемым функциями Матье.

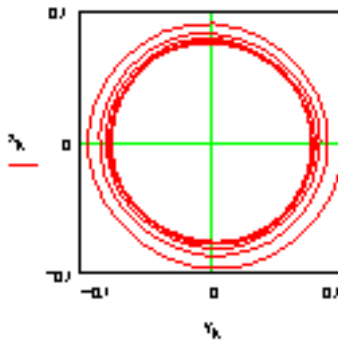


Рис. 4. Фазовая траектория при параметрическом резонансе

Задание 1. *Исследование гармонического осциллятора при наличии силы трения и вынуждающих сил.*

1. С помощью программы-заготовки на Mathcad решить уравнение гармонического осциллятора для параметров соответствующего варианта. (см. Приложение 2). Представить на графике $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(x)$.
2. Ввести в уравнение затухание. Представить на графике $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(x)$.
3. Ввести вынуждающую силу. Представить на графике $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(x)$.

Задание 2. *Исследование больших колебаний физического маятника.*

1. С помощью программы-заготовки на Mathcad решить уравнение (2). Исследовать зависимость $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\varphi}(\varphi)$ для различных значений начального отклонения и начальной скорости.
2. Найти зависимость периода от начального отклонения.

Задание 3. *Исследование больших колебаний пружинного маятника.*

1. С помощью программы-заготовки на Mathcad решить уравнение (14). Исследовать зависимости $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(x)$ для различных значений начального смещения.
2. Найти зависимость периода колебаний от начального смещения и начальной скорости.

Задание 4. *Исследование автоколебаний.*

1. С помощью программы-заготовки на Mathcad решить уравнение (19). Исследовать уравнение Ван дер Поля для различных значений параметра ε .
2. Представить на графиках $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(x)$.

Задание 5. *Моделирование и исследование параметрического резонанса.*

1. Исследовать уравнение (20) для различных значений ε и β .
2. Исследовать уравнение для различных зависимостей $\omega(t)$.

Дополнительные творческие задания.

1. Шарик совершает колебания внутри ямки, форма которой описывается уравнением $y = f(x)$. Получите уравнение движения шарика и исследуйте его на компьютере.
2. Получите уравнение движения и исследуйте на компьютере колебания шарика на растяжимой нити (шарик на резинке). Трение пропорционально квадрату скорости.
3. Исследуйте свободные электромагнитные колебания в колебательном контуре с учетом нагревания резистора. Как изменится результат, если резистор заменить термистором? Что произойдет, если в контур добавить генератор?

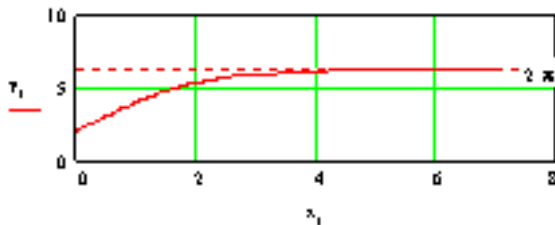
Контрольные вопросы

1. В чем состоят главные отличия ангармонического осциллятора от гармонического?
2. Получите уравнение ангармонического осциллятора в безразмерном виде.
3. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что частное решение неоднородного уравнения (7) должно содержать слагаемое вида $t \sin \omega_0 t$. Почему оно было опущено? Каков его физический смысл? В каких случаях его необходимо учитывать?
4. В чем состоит отличие автоколебаний от релаксационных колебаний?
5. Чем автоколебания отличаются от вынужденных колебаний?
6. Выведите уравнение параметрических колебаний для случая раскачивания на качелях. Приведите его к безразмерному виду.
7. Получите уравнение фазовой траектории для затухающих колебаний.

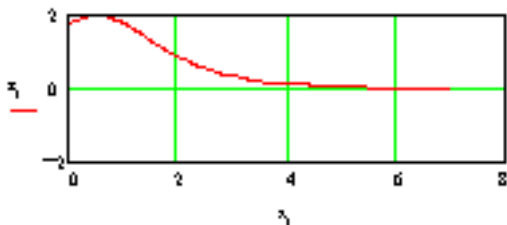
Указания:

- (a) приведите дифференциальное уравнение затухающих колебаний к безразмерному виду;
 - (b) перейдите к полярным координатам;
 - (c) ограничьтесь случаем малых затуханий.
8. Нарисуйте фазовый портрет физического маятника.

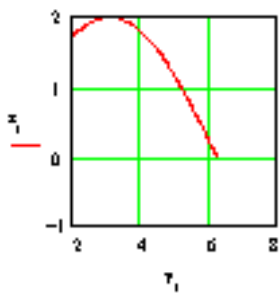
9. При моделировании больших колебаний физического маятника были получены представленные на рис. 5 результаты. Объясните, какому процессу соответствует проведенный расчет?



а)



б)



г)

Рис. 5. а) Зависимость угла отклонения маятника от времени. б) Зависимость скорости от времени. г) Фазовая траектория

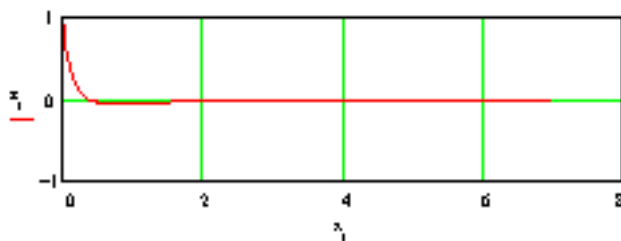
Список литературы

1. Киттель Ч., Найт В., Рудерман Н. Механика. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1983. (Берклевский курс физики.)
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. — М.: Высш. шк., 1986.

3. Сивухин Д.В. Электричество. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1983. (Общий курс физики)
4. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит-ры, 1985.

Приложение 1. Пример выполнения расчетов на Mathcad.

ЭВЕРНОСТЬ СКОРОСТИ ОТРЕМЕНА



Фазовый траектория

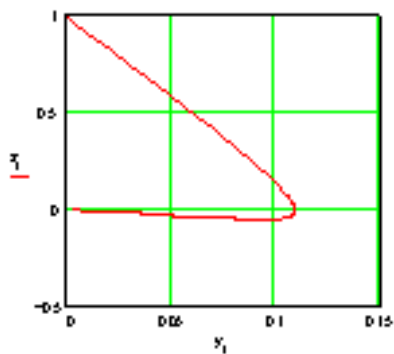


Таблица 1. Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6
Задание	$\omega = 1$	$\omega = 0,2$	$\omega = 0,3$	$\omega = 0,4$	$\omega = 0,5$	$\omega = 0,6$
1	$\varphi_0 = 45^\circ$ $v_0 = 0,1$ $f_0 = 1$ $\beta = 0,04$	$\varphi_0 = 30^\circ$ $v_0 = 0,2$ $f_0 = 0,5$ $\beta = 0,02$	$\varphi_0 = 60^\circ$ $v_0 = 0,3$ $f_0 = 2$ $\beta = 0,03$	$\varphi_0 = 0^\circ$ $v_0 = 1$ $f_0 = 2$ $\beta = 0,04$	$\varphi_0 = 90^\circ$ $v_0 = 0$ $f_0 = 1$ $\beta = 0,05$	$\varphi_0 = 180^\circ$ $v_0 = 1$ $f_0 = 0,5$ $\beta = 0,06$
2	$\varphi_0 = 10^\circ, 60^\circ,$ $90^\circ, 140^\circ, 180^\circ$ $v_0 = 0,1$	$\varphi_0 = 5^\circ, 65^\circ,$ $90^\circ, 125^\circ, 180^\circ$ $v_0 = 0,2$	$\varphi_0 = 20^\circ, 60^\circ,$ $90^\circ, 160^\circ, 180^\circ$ $v_0 = -0,1$	$\varphi_0 = 30^\circ, 45^\circ,$ $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ $v_0 = 1$	$\varphi_0 = 30^\circ, 45^\circ,$ $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ $v_0 = -1$	$\varphi_0 = 30^\circ, 60^\circ,$ $90^\circ, 120^\circ, 170^\circ$ $v_0 = 0,4$
3	$x_0 = 1, 1,5, 2$ $v_0 = 2$	$x_0 = 2, 3, 4$ $v_0 = 1$	$x_0 = 1,5, 3, 4$ $v_0 = 0,5$	$x_0 = 1, 2, 3$ $v_0 = 1,5$	$x_0 = 0, 1, 2$ $v_0 = 2$	$x_0 = 2, 3, 4$ $v_0 = 0$
4	$\varepsilon = 0,1, 1, 5, 10$ $x_0 = 0$ $v_0 = 0,5$	$\varepsilon = 0,1, 1, 5, 10$ $x_0 = 0,5$ $v_0 = 0,5$	$\varepsilon = 0,1, 1, 5, 10$ $x_0 = 1$ $v_0 = 4$	$\varepsilon = 0,1, 1, 5, 10$ $x_0 = 2$ $v_0 = 3$	$\varepsilon = 0,1, 1, 5, 10$ $x_0 = 2$ $v_0 = 2$	$\varepsilon = 0,1, 1, 5, 10$ $x_0 = 2,5$ $v_0 = 2,5$
5	$\varepsilon = 0,01$ $\beta = 0,01$ $\omega(t) = \sin 3\omega t$	$\varepsilon = 0,01$ $\beta = 0,02$ $\omega(t) = \cos \omega t/2$	$\varepsilon = 0,02$ $\beta = 0,01$ $\omega(t) = \sin \omega t/2$	$\varepsilon = 0,05$ $\beta = 0,02$ $\omega(t) = \cos \omega t$	$\varepsilon = 0,01$ $\beta = 0,05$ $\omega(t) = \sin 2\omega t$	$\varepsilon = 0,06$ $\beta = 0,1$ $\omega(t) = \sin \omega t$