

АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ
(УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ).**

**Астрахань,
2000**

Учебно-методическое пособие содержит 9 лабораторных работ по спецкурсу «Электромагнитные поля и волны», выполняемых на компьютере, и рекомендован для студентов специальности «200900 - Сети связи и системы коммутации», а также для студентов всех специальностей, обучающихся по курсу общей физики, разделы «Электричество и магнетизм», «Оптика».

Авторы:

Кандидат физико-математических наук, доцент Водолазская И.В.,
Доктор физико-математических наук, профессор Марвин В.Б.

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор Марвина Л.А.

Утверждено на заседании кафедры физики АГТУ: Протокол N 5 от 01.07. 2000.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящий сборник является методическим пособием к лабораторному практикуму по спецкурсу «Электромагнитные поля и волны» а также по курсу общей физики (разделы «Электричество и магнетизм», «Оптика»), выполняемых на компьютере. Лабораторные работы содержат необходимый теоретический материал, примеры решений различных физических задач с помощью математической программы «MathCAD-8» и контрольные задания для самостоятельного выполнения.

Выполнение лабораторных работ в компьютерном варианте позволяет решать задачи, аналитическое решение которых сильно затруднено, либо отсутствует. Кроме того, удобное графическое представление решений, возможность менять физические параметры и мгновенно наблюдать динамику изменения решений позволяют глубже разобраться в физическом явлении, стимулирует у студентов творческий подход к выполнению лабораторной работы. Авторы понимают, что компьютерный вариант лабораторного практикума не может полностью заменить вариант «в железе», для создания которого требуется намного больше времени и огромных материальных средств. С другой стороны, нельзя себе представить специалиста-инженера XXI века, который бы не смог воспользоваться современными мощными математическими программными продуктами для решения производственных задач и прогнозирования.

При написании методического пособия использовалась следующая литература:

1. Сивухин Д.В. Электричество.-М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит.,1983.
2. Сивухин Д.В. Оптика.-М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит.,1980.
3. Бутиков Е.И. Оптика.- М.: Высшая школа, 1986.

Составители рекомендуют преподавателям отводить на выполнение каждой лабораторной работы не менее 3-4 часов (выполняется одно контрольное задание). Преподаватели вправе менять контрольные задания и добавлять новые.

В качестве обозначений производной по времени авторы использовали как стандартное: $\frac{df}{dt}$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$, так и часто встречающееся в физической литературе: \dot{f} (одна точка над функцией – первая производная по времени, две точки над функцией – вторая производная по времени и так далее).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие – стр. 3

Содержание – стр. 4

Лабораторная работа 1. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях – стр. 5.

Лабораторная работа 2. Модуляция сигнала – стр. 15.

Лабораторная работа 3. Дифракция электромагнитных волн – стр. 25.

Лабораторная работа 4. Законы отражения и преломления света – стр.35.

Лабораторная работа 5. Фурье-анализ сигнала – стр. 44.

Лабораторная работа 6. Сложение колебаний и волн – стр. 48.

Лабораторная работа 7. Скин-эффект – стр. 56.

Лабораторная работа 8. Электростатическое поле от различного распределения зарядов – стр. 66.

Лабораторная работа 9. Связанные моды – стр. 71.

Лабораторная работа 1.

Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

Движение заряженных частиц в электрическом поле.

В электрическом поле на частицу с зарядом q действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Если движение не релятивистское, а поле однородно, то частица движется с постоянным ускорением $\vec{a} = q\vec{E}/m$. Такое движение вполне аналогично движению частицы в однородном постоянном гравитационном поле. Для релятивистских движений масса частицы m возрастает со скоростью v , а ускорение — убывает.

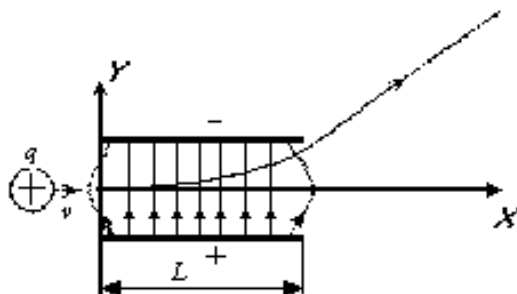


Рис. 1.1.

Предположим, что заряженные частицы, двигавшиеся первоначально вдоль оси X (рис. 1.1) со скоростью v_0 попадают в электрическое поле плоского конденсатора. Если зазор между пластинами мал по сравнению с их длиной L , то краевыми эффектами можно пренебречь и считать электрическое поле между пластинами однородным. Направляя ось Y параллельно полю, мы имеем: $E_x = E_z = 0$, $E_y = E$.

Движение частиц в этом случае происходит под действием постоянной силы и подобно движению горизонтально брошенного тела в поле тяжести.

Запишем уравнение движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \text{ где } \vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}, \text{ в проекциях на оси:}$$

$$\begin{cases} \frac{d(m_0 \cdot \dot{x})}{dt} = 0 \\ \frac{d(m_0 \cdot \dot{y})}{dt} = qE \\ \frac{d(m_0 \cdot \dot{z})}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m_0} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (1.1) необходимо задать начальные условия. Пусть в начальный момент времени координаты частицы были равными нулю, тогда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как в начальный момент времени скорость частицы была направлена вдоль оси X, то $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v$. Реализуем поставленную задачу в математическом приложении MathCAD (пример № 1.1).

Если рассматривать движение заряженной частицы с релятивистской скоростью в однородном электрическом поле, то масса этой частицы m будет релятивистской

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

значит и импульс частицы будет также релятивистским

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Аналогично рассмотренному выше случаю для нерелятивистской частицы, запишем систему дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой будет описывать траекторию движения релятивистской заряженной частицы в однородном электрическом поле:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m_0} \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Пример № 1.1. Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном электрическом поле с нерелятивистской скоростью.

Дано:

напряженность электрического поля $\rightarrow E := 10$

заряд частицы $\rightarrow q := 1.6 \cdot 10^{-19}$

масса частицы $\rightarrow m_0 := 1.7 \cdot 10^{-27}$

начальная скорость частицы $\rightarrow v_0 := 100$

Решение: Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся функцией `rkfixed`, которая использует для поиска решения метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Сформируем вектор начальных условий

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} <x(0) - \text{координата частицы в начальный момент времени вдоль оси X} \\ <-x'(0) - \text{скорость частицы в начальный момент времени вдоль оси X} \\ <y(0) - \text{координата частицы в начальный момент времени вдоль оси Y} \\ <-y'(0) - \text{скорость частицы в начальный момент времени вдоль оси Y} \\ <-z(0) - \text{координата частицы в начальный момент времени вдоль оси Z} \\ <-z'(0) - \text{скорость частицы в начальный момент времени вдоль оси Z} \end{array}$$

Сформируем вектор первых и вторых производных

$$D(t,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ \frac{q \cdot E}{m_0} \\ u_5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} <---x'(t) - \text{первая производная x по t} \\ <---x''(t) - \text{вторая производная x по t} \\ <---y'(t) - \text{первая производная y по t} \\ <---y''(t) - \text{вторая производная y по t} \\ <---z'(t) - \text{первая производная z по t} \\ <---z''(t) - \text{вторая производная z по t} \end{array}$$

При использовании функции `rkfixed` необходимо задать граничные точки интервала, на котором будем искать решение дифференциальных уравнений:

$$t1 := 0, \quad t2 := 100.$$

Также необходимо задать число точек, в которых ищется приближенное решение: $N := 100$.

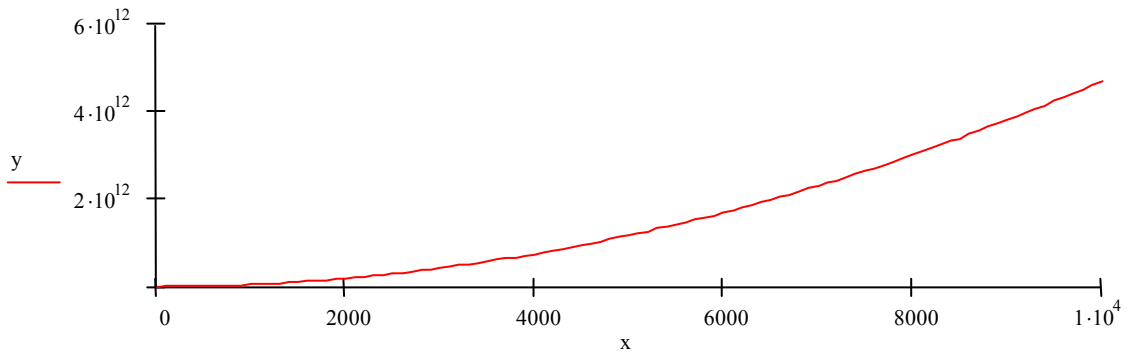
Функция `rkfixed` возвращает матрицу, в которой первый столбец содержит точки, в которых должны быть найдены решения; остальные столбцы содержат значения решений и их производных.

$$Z := \text{rkfixed}(u, t1, t2, N, D)$$

| | t | x(t) | x'(t) | y(t) | y'(t) | z(t) |
|-----|----|------------------|-------|-----------------------|-----------------------|------|
| | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 100 | 100 | $4.706 \cdot 10^8$ | $9.412 \cdot 10^8$ | 0 |
| | 2 | 200 | 100 | $1.882 \cdot 10^9$ | $1.882 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 3 | 300 | 100 | $4.235 \cdot 10^9$ | $2.824 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 4 | 400 | 100 | $7.529 \cdot 10^9$ | $3.765 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 5 | 500 | 100 | $1.176 \cdot 10^{10}$ | $4.706 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 6 | 600 | 100 | $1.694 \cdot 10^{10}$ | $5.647 \cdot 10^9$ | 0 |
| Z = | 7 | 700 | 100 | $2.306 \cdot 10^{10}$ | $6.588 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 8 | 800 | 100 | $3.012 \cdot 10^{10}$ | $7.529 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 9 | 900 | 100 | $3.812 \cdot 10^{10}$ | $8.471 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 10 | $1 \cdot 10^3$ | 100 | $4.706 \cdot 10^{10}$ | $9.412 \cdot 10^9$ | 0 |
| | 11 | $1.1 \cdot 10^3$ | 100 | $5.694 \cdot 10^{10}$ | $1.035 \cdot 10^{10}$ | 0 |
| | 12 | $1.2 \cdot 10^3$ | 100 | $6.776 \cdot 10^{10}$ | $1.129 \cdot 10^{10}$ | 0 |
| | 13 | $1.3 \cdot 10^3$ | 100 | $7.953 \cdot 10^{10}$ | $1.224 \cdot 10^{10}$ | 0 |
| | 14 | $1.4 \cdot 10^3$ | 100 | $9.224 \cdot 10^{10}$ | $1.318 \cdot 10^{10}$ | 0 |
| | 15 | $1.5 \cdot 10^3$ | 100 | $1.059 \cdot 10^{11}$ | $1.412 \cdot 10^{10}$ | 0 |

Построим график зависимости $y(x)$, так как движение происходит в плоскости XOY .

$$x := Z \langle 1 \rangle \quad y := Z \langle 3 \rangle$$



Движение заряженных частиц в магнитном поле.

В постоянном магнитном поле на заряженную частицу действует сила $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$. Эта сила перпендикулярна к скорости \vec{v} , а потому работы не производит. Она только искривляет траекторию, но не изменяет величину скорости частицы. Не меняется, следовательно, и масса частицы m .

Рассмотрим случай однородного магнитного поля. Если скорость частицы направлена вдоль поля \vec{B} , то сила F_m обратится в нуль и частица будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью.

Если же частица движется перпендикулярно к магнитному полю, то ее скорость, оставаясь постоянной по величине, меняется по направлению. Сила $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$ также постоянна по величине и нормальна к траектории частицы. Отсюда следует, что траекторией частицы будет окружность, плоскость которой перпендикулярна к магнитному полю. Направление вращения частицы по окружности показано на рис.1.2 (магнитное поле направлено к читателю).

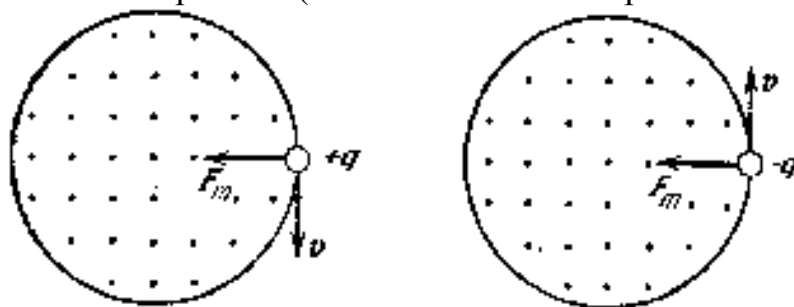


Рис. 1.2.

Если заряд q положителен, то направления вектора \vec{B} и угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ противоположны. Если же заряд q отрицателен, то эти направления совпадают. Ускорение частицы направлено к центру окружности, по которой она вращается, и равно $\omega^2 \rho$, где ρ — радиус этой окружности.

Величина угловой скорости ω найдется из уравнения движения $m\omega^2\rho = |q|Bv$. Так как $v = \omega\rho$, то отсюда получаем $\omega = |q|B/m$. Величина ω называется циклотронной частотой, а ρ — циклотронным радиусом.

Предположим, что заряженная частица движется первоначально вдоль оси X со скоростью v_0 , а вектор B направлен вдоль оси Y (т.е. $B_x = B_z = 0$, $B_y = B$). Получим систему дифференциальных уравнений, решения которой будут описывать траекторию движения частицы.

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}] = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}B\dot{z}q + \vec{k}B\dot{x}q$$

Импульс нерелятивистской частицы равен $\vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}$, а так как $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ то:

$$\begin{cases} \frac{d(m_0 \cdot \dot{x})}{dt} = -B\dot{z}q \\ \frac{d(m_0 \cdot \dot{y})}{dt} = 0 \\ \frac{d(m_0 \cdot \dot{z})}{dt} = B\dot{x}q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{qB}{m_0}\dot{z} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{qB}{m_0}\dot{x} \end{cases} \quad (1.3).$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений второго порядка (1.3).

Пусть в начальный момент времени координаты частицы были равными нулю, тогда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как в начальный момент времени скорость частицы была направлена вдоль оси X , то $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v_0$. Реализуем поставленную задачу в математическом приложении MathCAD (пример № 1.2).

Пример № 1.2. Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле с нерелятивистской скоростью.

Дано:

вектор магнитной индукции ----- $\rightarrow B := 1$
 заряд частицы ----- $\rightarrow q := 16$
 масса частицы ----- $\rightarrow m_0 := 1$
 начальная скорость частицы ----- $\rightarrow v_0 := 1$

Решение:

Для решения системы дифференциальных уравнений (смотри пример № 1.1) воспользуемся функцией `rkfixed`. Сформируем вектор начальных условий и вектор первых и вторых производных:

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_5 \\ u_3 \\ 0 \\ u_5 \\ \frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_1 \end{pmatrix}$$

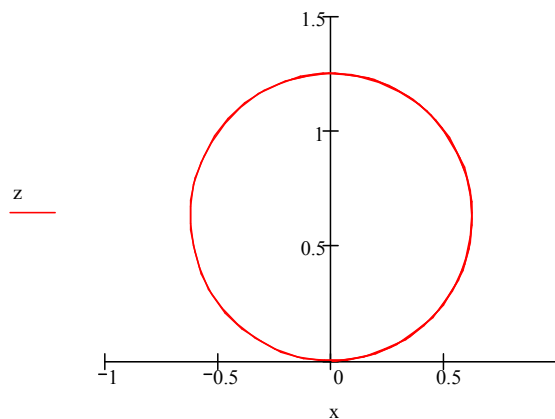
Зададим граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений, и число точек, в которых ищется приближенное решение:

$$t1 := 0, \quad t2 := 10, \quad N := 100.$$

Получим матрицу решений и их производных, а также построим график зависимости $z(x)$, так как движение происходит в плоскости XOZ.

$$Z := \text{rkfixed}(u, t1, t2, N, D)$$

$$x := Z \langle 1 \rangle \quad y := Z \langle 3 \rangle \quad z := Z \langle 5 \rangle$$



При рассмотрении общего случая, когда скорость \vec{v} направлена под углом к магнитному полю, ограничимся нерелятивистскими скоростями. Представим скорость \vec{v} в виде $\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$, где $\vec{v}_{||}$ — скорость вдоль поля, а \vec{v}_{\perp} — перпендикулярная к нему. Движения с этими скоростями независимы. Первое есть равномерное прямолинейное движение вдоль поля со скоростью $\vec{v}_{||}$, второе — равномерное вращение по окружности вокруг поля с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Радиус этой окружности равен $\rho = v_{\perp} / \omega$. В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 1.3).

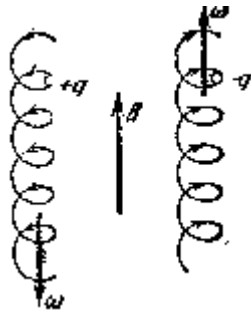


Рис. 1.3.

Этот случай также рассмотрим в MathCADe (пример № 1.3), где поле \vec{B} зададим как $B_x=B_z=0$ $B_y=B$, а вектор скорости, например, как $v_x=v_y=v_0$ $v_z=0$.

Пример № 1.3: Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле с нерелятивистской скоростью, направленной под углом к вектору магнитной индукции.

Дано:

вектор магнитной индукции----- $\rightarrow B := 1$

заряд частицы ----- $\rightarrow q := 1.6$

масса частицы ----- $\rightarrow m_0 := 1$

начальная скорость частицы ----- $\rightarrow v_{0x} := 1$, $v_{0y} := 1$, $v_{0z} := 0$.

Решение:

Сформируем вектор начальных условий и вектор первых и вторых производных:

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0x} \\ 0 \\ v_{0y} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix} \quad D(t,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_5 \\ u_3 \\ 0 \\ u_5 \\ \frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_1 \end{pmatrix}$$

Зададим граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений, и число точек, в которых ищется приближенное решение:

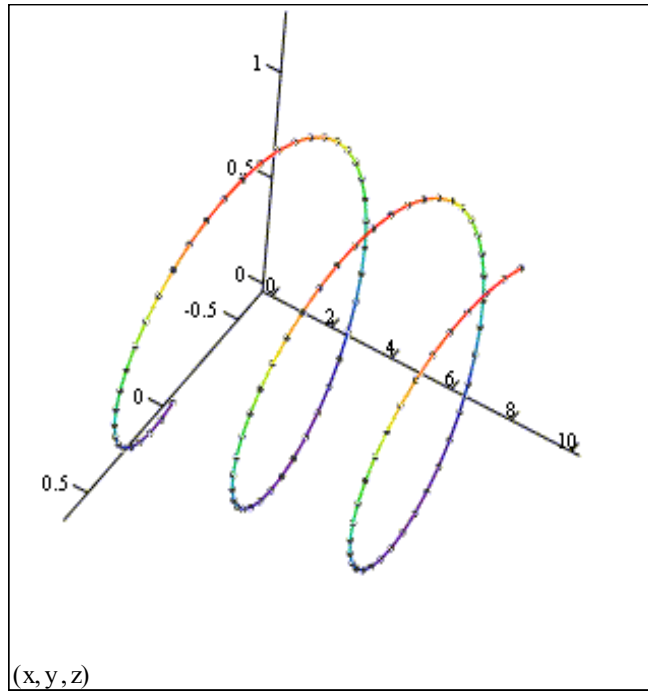
$$t1 := 0 \quad , \quad t2 := 10 \quad , \quad N := 100$$

Получим матрицу решений и их производных.

$$Z := \text{rkfixed}(u, t1, t2, N, D)$$

Построим 3D точечный график, координаты которого заданы параметрически:

$$x := Z \langle 1 \rangle \quad , \quad y := Z \langle 3 \rangle \quad , \quad z := Z \langle 5 \rangle$$



Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.

Представляет интерес так называемый циклотронный (диамагнитный) резонанс.

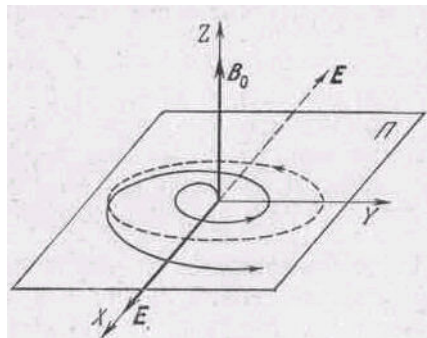


Рис. 1.4.

Если поместить заряженную частицу в постоянное магнитное поле и одновременно подвергнуть ее воздействию переменного электрического поля, перпендикулярного к магнитному полю, то при этом происходит явление, аналогичное процессу ускорения ионов в циклотроне. Рассмотрим качественно поведение, например, свободного электрона в этих условиях. В постоянном магнитном поле (индукцию которого обозначим через \vec{B}_0) электрон движется по окружности, лежащей в плоскости Π (рис. 1.4), перпендикулярной к магнитному полю, с циклотронной частотой обращения

$$\omega_c = (e/m)B_0.$$

Его круговое движение можно разложить на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания в плоскости Π и рассматривать электрон в постоянном магнитном поле как два гармонических осциллятора,

колеблющиеся вдоль осей X и Y с одинаковой частотой ω_c и с постоянной разностью фаз, равной $\pi/2$.

Положим теперь, что на электрон вдоль оси OX действует еще электрическое поле \vec{E}_0 электромагнитной волны, лежащее в плоскости Π и изменяющееся с частотой ω . Тогда на каждый из указанных осцилляторов будет действовать периодическая внешняя сила с частотой ω , и поэтому они будут совершать вынужденные колебания с той же частотой ω . Но из механики известно, что при условии

$$\omega = \omega_c$$

возникает явление резонанса, при котором амплитуда колебаний осциллятора и его энергия достигают наибольшего значения, а в случае отсутствия затухания (сил трения) неограниченно увеличиваются с течением времени. Поэтому свободный электрон при резонансе будет набирать энергию за счет энергии электромагнитной волны и двигаться по раскручивающейся траектории (рис. 1.4). Описанное явление получило название циклотронного резонанса или, иначе, диамагнитного резонанса. Система дифференциальных уравнений для данного явления выводится аналогично выше рассмотренным случаям. Реализация в MathCADe – пример № 1.4.

Пример № 1.4. Рассмотрим циклотронный (диамагнитный) резонанс.

Дано:

вектор магнитной индукции-----> $B := 1$

заряд частицы -----> $q := 1.6$

масса частицы -----> $m0 := 1$

начальная скорость частицы -----> $v0 := 1$

циклическая частота колебаний электрического поля ---> $\omega := \frac{q \cdot B}{m0}$

электрическое поле -----> $E0 := 1$, $E(t) := E0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Решение:

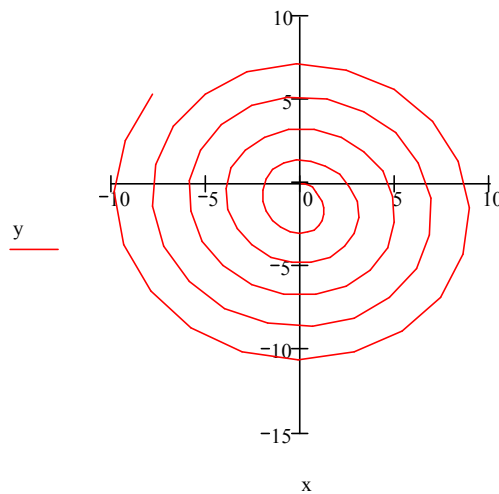
Сформируем вектор начальных условий и вектор первых и вторых производных. Зададим граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений, и число точек, в которых ищется приближенное решение.

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{B \cdot q}{m0} \cdot u_3 + \frac{q}{m0} \cdot E(t) \\ u_3 \\ -\frac{B \cdot q}{m0} \cdot u_1 \\ u_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t1 := 0, \quad t2 := 20, \quad N := 100$$

Получим матрицу решений и их производных, построим график зависимости $y(x)$

$$Z := \text{rkfixed}(u, t1, t2, N, D) \quad x := Z \langle 1 \rangle \quad y := Z \langle 3 \rangle$$



Задания:

- 1). В однородное постоянное электростатическое поле, направленное вдоль оси Y , влетает нерелятивистская заряженная частица под углом α к вектору напряженности электрического поля. Определить траекторию движения частицы.
- 2). В однородное постоянное электростатическое поле, направленное вдоль оси Z , влетает релятивистская заряженная частица вдоль оси Y . Определить траекторию движения частицы. Определить зависимость скорости частицы от времени.
- 3). В однородное постоянное магнитное поле влетают две нерелятивистские заряженные частицы с одинаковыми скоростями, направленными перпендикулярно к магнитному полю;
 - а) массы частиц одинаковы, заряды различны,
 - б) заряды частиц одинаковы, массы различны.
 Определить траектории движения частиц в случаях а) и б).
- 4). Нерелятивистская заряженная частица с зарядом q и с массой m_0 пролетает через двумерное электростатическое поле с потенциалом $\phi = k(x^2 - y^2)$, $k = \text{const} > 0$ (линза сильной фокусировки) В момент времени $t=0$ частица находится в точке с координатами $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, начальная скорость v_0 параллельна оси Z . Определить траекторию движения частицы.
- 5). Заряженная частица с зарядом q и с массой m_0 пролетает через магнитостатическое поле с векторным потенциалом $\vec{A} = k(y^2 - z^2)\vec{i} + k(x^2 - z^2)\vec{j} + k(x^2 - y^2)\vec{z}$, $k = \text{const} > 0$. В момент времени $t=0$ частица находится в точке с координатами $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, начальная скорость v_0 параллельна оси Y . Определить траекторию движения частицы.
- б). Рассмотреть случай циклотронного резонанса для релятивистской частицы.

Лабораторная работа 2. Модуляция сигнала.

Понятие о модуляции.

Модуляция — это процесс изменения одного или нескольких параметров несущего сигнала в соответствии с изменением параметров воздействующего сигнала (модулирующего сигнала).

Параметры несущего сигнала, изменяющиеся во времени под воздействием модулирующего сигнала, называются информационными, так как в их изменениях заложена передаваемая информация. Модулированные сигналы различаются по виду несущего сигнала и по модулируемым параметрам. В качестве несущего сигнала в настоящее время широко используются гармонические колебания, периодическая последовательность импульсов, реже — колебания специальной формы, узкополосный случайный процесс.

Гармоническая несущая $s_n(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0)$, например, характеризуется тремя свободными параметрами: амплитудой, частотой и фазой. Все они могут быть информационными. Изменяя один из них при постоянстве других, получаем три основных вида модуляции: амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ).

Модулированный сигнал при гармонической несущей в общем случае можно представить в виде

$$s(u_m, t) = A(t) \cos \Psi(t) \quad (2.1),$$

где модулированный сигнал на выходе модулятора зависит от времени и от модулирующего сигнала $u_m(t)$, поэтому и обозначается как функция двух аргументов $s(u_m, t)$; $A(t)$ — огибающая сигнала; $\Psi(t)$ — полная фаза. За интервал времени, в течение которого полная фаза $\Psi(t)$ изменится на 2π , огибающая не успеет сильно измениться и ее можно считать медленно меняющейся.

В модулированном сигнале (2.1) мгновенная угловая частота есть производная от полной фазы по времени

$$\omega(t) = d\Psi(t)/dt \quad (2.2)$$

При определении параметров модулированных сигналов обычно считают, что модулирующий сигнал $u_m(t)$ нормирован, то есть максимальное абсолютное значение равно единице $\max |u_m(t)| = 1$.

Главная особенность любой модуляции — преобразование спектра модулирующего сигнала. В общем случае происходит расширение спектра, а при гармоническом несущем сигнале — перенос спектра в область около частоты несущего сигнала.

Амплитудная модуляция.

При амплитудной модуляции амплитуда несущего колебания изменяется пропорционально мгновенным значениям модулирующего сигнала $u_m(t)$, то есть становится равной

$$A(t) = A_0 + au_m(t) \quad (2.3),$$

где A_0 — амплитуда несущей; a — коэффициент пропорциональности, выбираемый так, чтобы амплитуда $A(t)$ всегда была положительной. Частота и фаза несущего гармонического колебания при АМ остаются неизменными.

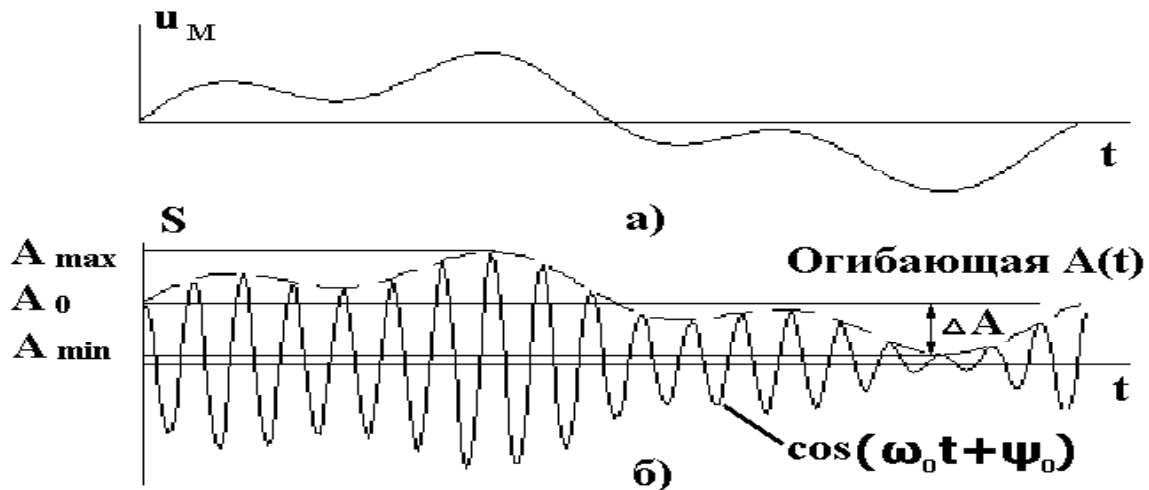


Рис. 2.1.

Временная диаграмма АМ сигнала показана на рис. 2.1 (а – модулирующий сигнал, б – амплитудно-модулированный сигнал), из которого видно, что в соответствии с мгновенными значениями $u_m(t)$ амплитуда несущей A_0 увеличивается до значения A_{max} , получая приращение $\Delta A_+ = A_{max} - A_0 = au_{mmax}$, или уменьшается, получая приращение $\Delta A_- = A_{min} - A_0 = au_{mmin}$. Обращает на себя внимание, что амплитуда $A(t)$ повторяет форму модулирующего сигнала $u_m(t)$. В АМ сигнале амплитуда $A(t)$ является огибающей высокочастотного заполнения $\cos(\omega_0 t + \psi_0)$.

Для математического описания АМ сигнала в (2.3) вместо коэффициента пропорциональности a , зависящего от конкретной схемы модулятора, вводится коэффициент модуляции по формуле:

$$M = \Delta A / A_0 \quad (2.4)$$

то есть коэффициент модуляции равен отношению максимального приращения амплитуды к амплитуде несущего сигнала. Физически M характеризует собой глубину амплитудной модуляции и может изменяться в пределах $0 \leq M \leq 1$.

Подставляя (2.3) в (2.1) с учетом введенного коэффициента модуляции M , получаем аналитическое выражение (математическую модель) любого АМ сигнала

$$s_{AM}(u_m, t) = A_0 [1 + Mu_m(t)] \cos(\omega_0 t + \psi_0) \quad (2.5)$$

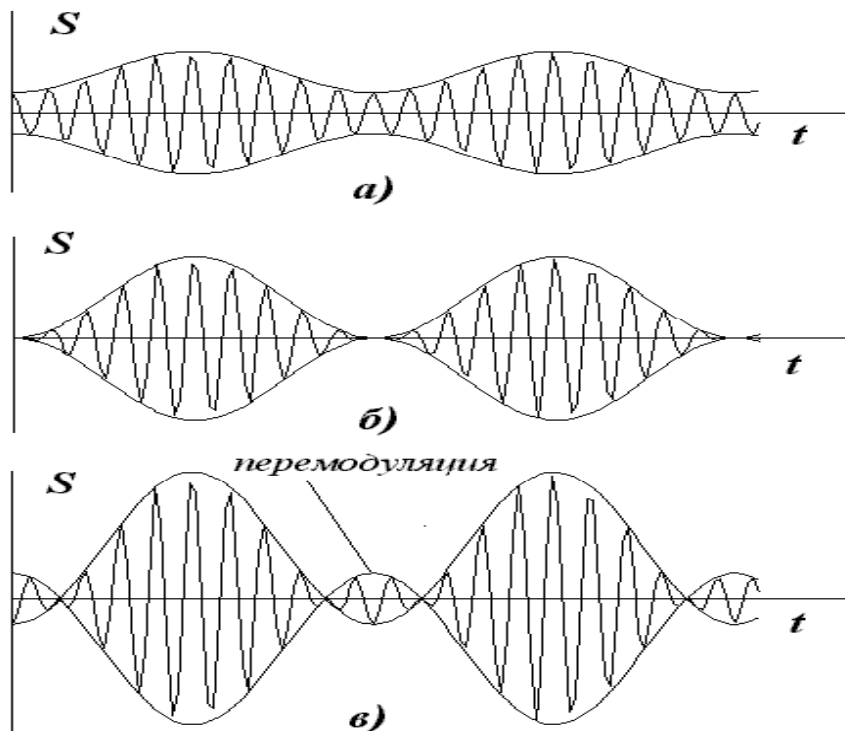


Рис.2.2.

В простейшем случае модулирующий сигнал $u_m(t)$ является гармоническим колебанием с частотой $\Omega \ll \omega_0$ и начальной фазой Ψ . При этом (2.6)

$$s_{AM}(u_m, t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + \Psi)] \cos(\omega_0 t + \psi_0) \quad (2.6)$$

представляет собой аналитическое выражение однотонового АМ сигнала. На рис. 2.2 показаны временные диаграммы однотонового АМ сигнала при различных значениях коэффициента модуляции M . Легко заметить характерные искажения при перемодуляции (рис.2.2, в), когда форма огибающей перестает повторять форму модулирующего гармонического колебания. Рассмотрим однотоновую амплитудную модуляцию в математическом приложении MathCAD – пример N 2.1.

Пример N 2.1. Рассмотрим амплитудную модуляцию гармоническим сигналом.

Амплитуда модулируемого сигнала

Различные коэффициенты АМ:

нормальная АМ $M_1 := 0.5$ $A_0 := 1$

100% АМ $M_2 := 1$

перемодуляция $M_3 := 1.5$

Частота и начальная фаза модулирующего сигнала: $\Omega := 1$, $\Psi := \pi$

Частота модулируемого сигнала $\omega_0 := 15$

Начальная фаза модулируемого сигнала $\psi_0 := \pi$

Рассматриваемый промежуток времени: $t := 0, 0.05 \dots 13$

Аналитические выражения однотонового АМ сигнала

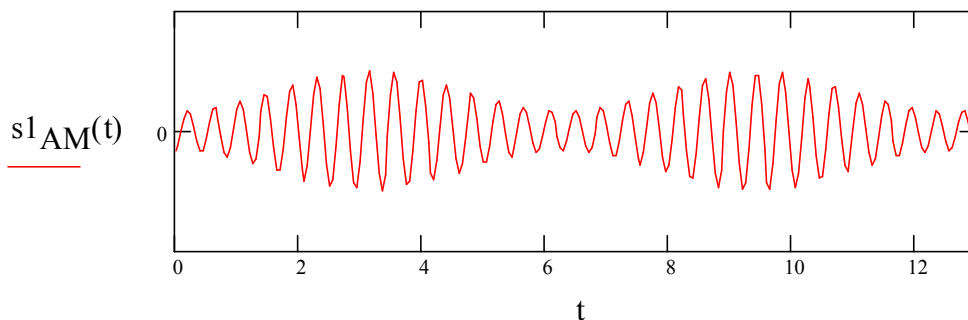
$$s1_{AM}(t) := A_0 \cdot (1 + M_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \Psi)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$$

$$s2_{AM}(t) := A_0 \cdot (1 + M_2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \Psi)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$$

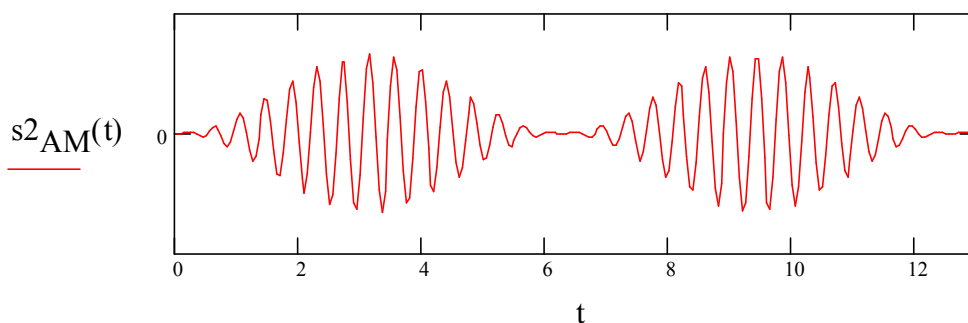
$$s3_{AM}(t) := A_0 \cdot (1 + M_3 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \Psi)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$$

Соответствующие временные диаграммы:

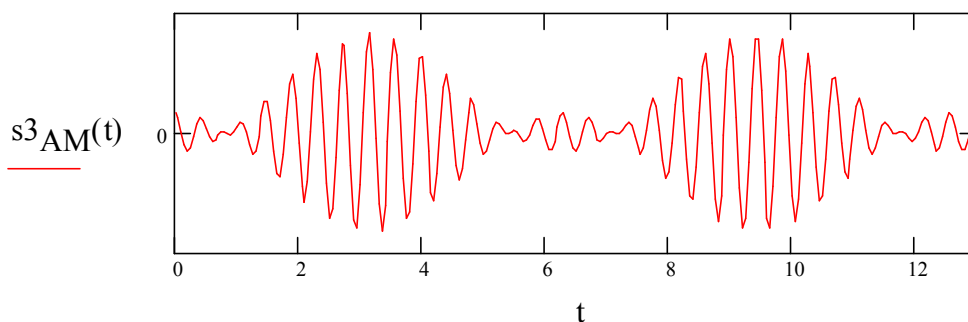
нормальная амплитудная модуляция



100% амплитудная модуляция



перемодуляция



Фазовая и частотная модуляции гармонического несущего сигнала.

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \psi_0 + \Delta\varphi_D u_m(t) \quad (2.7),$$

где $\Delta\varphi_D$ — коэффициент пропорциональности, называемый (от латинского *deviatio* — отклонение). Физический смысл этого коэффициента поясняется на рис. 2.3, где изображены модулирующий сигнал а) и полная фаза ФМ сигнала б). С увеличением сигнала $u_m(t)$ полная фаза $\Psi(t)$ растет во времени быстрее, чем по линейному закону. При значениях сигнала $u_m(t) < 0$ происходит спад скорости роста $\Psi(t)$. Абсолютная величина отклонения фазы от линейной

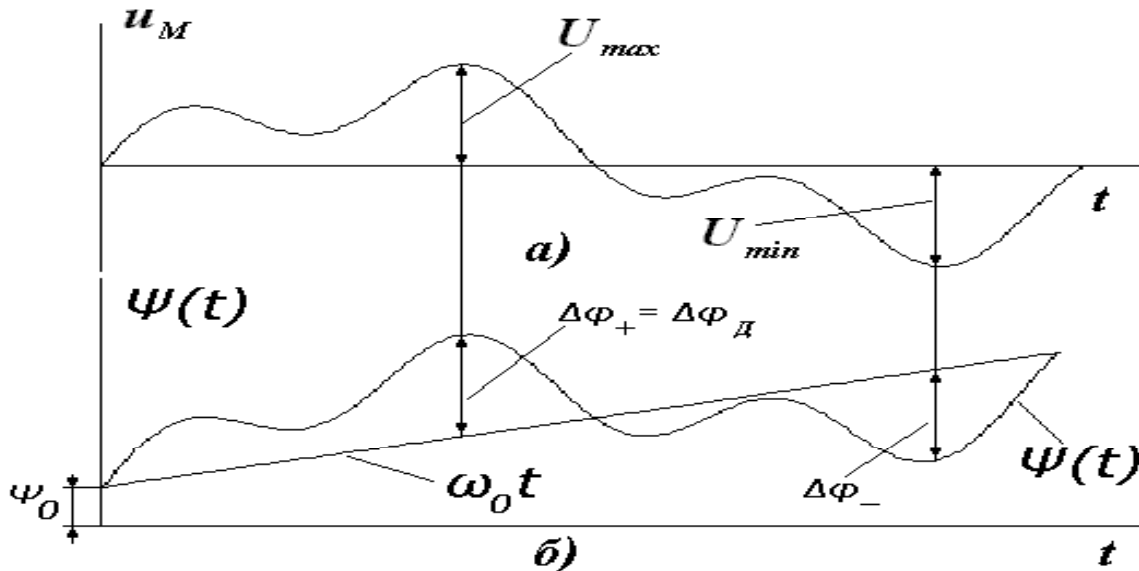


Рис. 2.3

наибольшая, когда $u_m(t)$ достигает экстремальных значений. На рис. 2.3,б отмечено максимальное отклонение фазы вверх $\Delta\varphi_+$ и вниз $\Delta\varphi_-$. Наибольшее отклонение фазы от линейной и является девиацией фазы $\Delta\varphi_D$ при ФМ. В примере на рис. 2.3 $\Delta\varphi_D = \Delta\varphi_+$. Измеряется $\Delta\varphi_D$ в радианах и может принимать значение от единиц до десятков тысяч радиан.

Подставляя (2.7) в (2.1), получаем аналитическое выражение (математическую модель) ФМ сигнала:

$$S_{\text{ФМ}}(u_m, t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \psi_0 + \Delta\varphi_D u_m(t)] \quad (2.8)$$

При частотной модуляции отклонение частоты модулированного сигнала от ω_0 изменяется пропорционально мгновенным значениям модулирующего сигнала $u_m(t)$

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_D u_m(t) \quad (2.9),$$

где $\Delta\omega_D$ — коэффициент пропорциональности.

По аналогии с ФМ коэффициент $\Delta\omega_D$ называют девиацией частоты и она равна наибольшему отклонению частоты модулированного сигнала от значения частоты несущей ω_0 . Изменение частоты ЧМ сигнала графически показано на рис. 2.4 (а – модулирующий сигнал, б – изменение мгновенной частоты), где отмечена девиация частоты $\Delta\omega_D$, соответствующая наибольшему отклонению частоты вниз $\Delta\omega_D = \Delta\omega_-$, поскольку $\Delta\omega_+ < \Delta\omega_-$. Как и при ФМ, в выражении (2.9) величина $u_m(t)$ нормирована, то есть $|u_m(t)| \leq 1$.

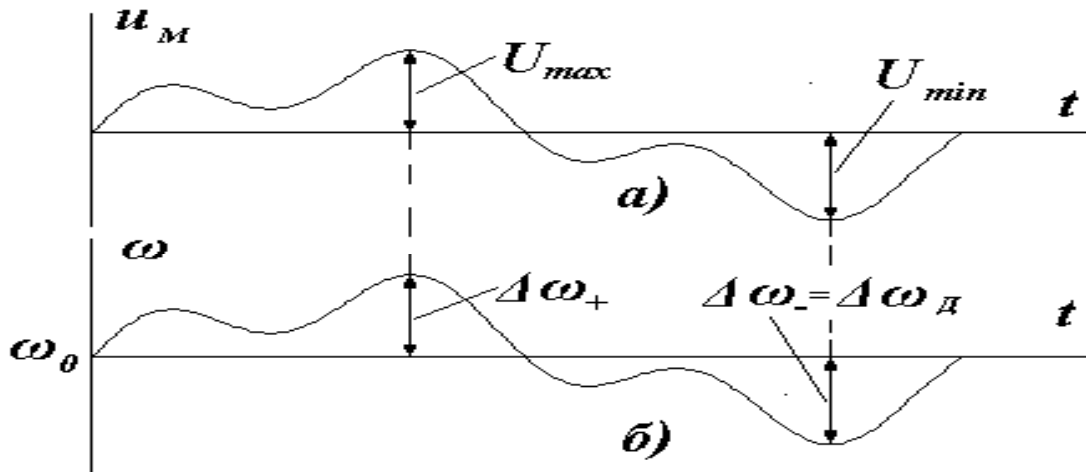


Рис.2.4.

Девияция частоты является одним из главных параметров частотных модуляторов и может принимать значения от единиц герц до сотен мегагерц в модуляторах различного назначения. Однако всегда необходимо, чтобы выполнялось условие $\Delta\omega_D \ll \omega_0$.

Полную фазу ЧМ сигнала с частотой (2.9) согласно (2.2) находим путем интегрирования, то есть

$$\Psi_{\text{ЧМ}}(t) = \int \omega(t) dt = \int [\omega_0 + \Delta\omega_D u_m(t)] dt = \omega_0 t + \Delta\omega_D \int u_m(t) dt + \psi_0,$$

где ψ_0 можно рассматривать как постоянную интегрирования. Тогда аналитическое выражение (математическая модель) ЧМ сигнала запишется в виде

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \psi_0 + \Delta\omega_D \int u_m(t) dt] \quad (2.10)$$

Поскольку $u_m(t)$ входит в это выражение под знаком интеграла, ЧМ часто называют интегральным видом модуляции.

При модуляции одним тоном $u_m(t) = \cos(\Omega t + \Psi)$ с учетом того, что $\int \cos ax = (1/a) \sin ax$ из (2.10) и (2.8) получаем, что аналитические выражения ФМ и ЧМ сигналов по форме записи имеют совершенно одинаковый вид:

$$S_{\text{ФМ}}(u_m, t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \psi_0 + m_{\text{ФМ}} \cos(\Omega t + \Psi)];$$

$$S_{\text{ЧМ}}(u_m, t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \psi_0 + m_{\text{ЧМ}} \sin(\Omega t + \Psi)];$$

где m — индекс модуляции. Отличие только в порядке вычисления индекса и фазы модулирующего колебания. При ФМ индекс модуляции $m_{\text{ФМ}}$ — величина, равная девиации фазы модулированного сигнала при гармоническом модулирующем сигнале $u_m(t)$, т. е. $m_{\text{ФМ}} = \Delta\varphi_D$. При ЧМ индекс модуляции $m_{\text{ЧМ}}$ — отношение девиации частоты модулированного сигнала $\Delta\omega_D = 2\pi\Delta f_d$ к частоте модулирующего гармонического сигнала $\Omega = 2\pi F$, то есть, $M_{\text{ЧМ}} = \Delta\omega_D / \Omega = \Delta f_d / F$. Следовательно, индекс частотной модуляции является амплитудой отклонения фазы, измеренной в радианах.

При гармоническом модулирующем сигнале временные диаграммы ФМ и ЧМ имеют совершенно одинаковый вид (рис. 2.5). Отличить их можно, только сравнив изменение мгновенной фазы модулированного сигнала с законом изменения модулирующего колебания.

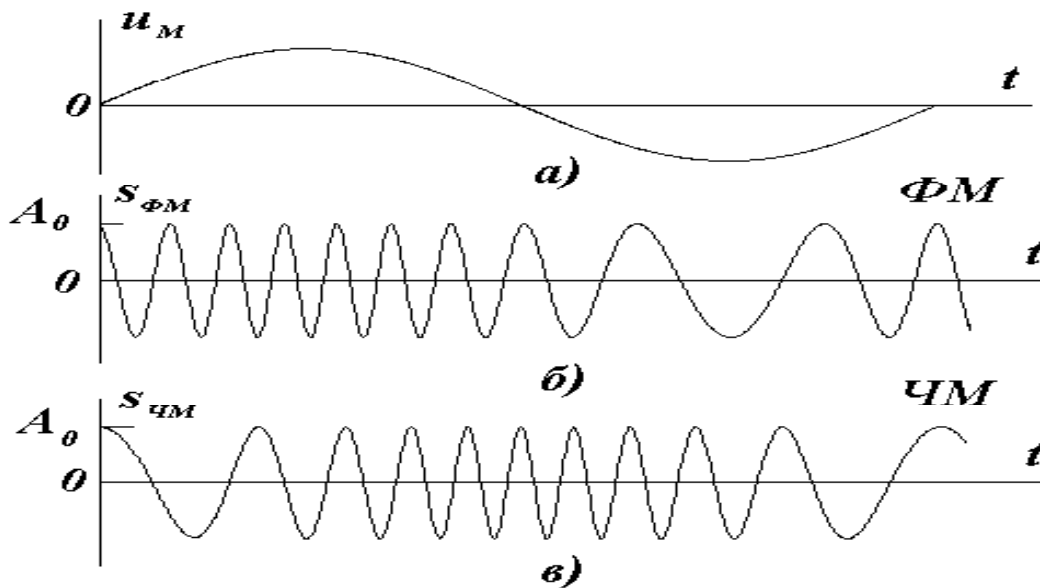


Рис.2.5

Рассмотрим фазовую и частотную модуляцию в математическом приложении MathCAD – пример N 2.2.

Пример N 2.2. Рассмотрим фазовую и частотную однотоновую модуляцию.

Индекс фазовой модуляции $m_{\text{ФМ}} := 10$

Индекс частотной модуляции $m_{\text{ЧМ}} := 10$

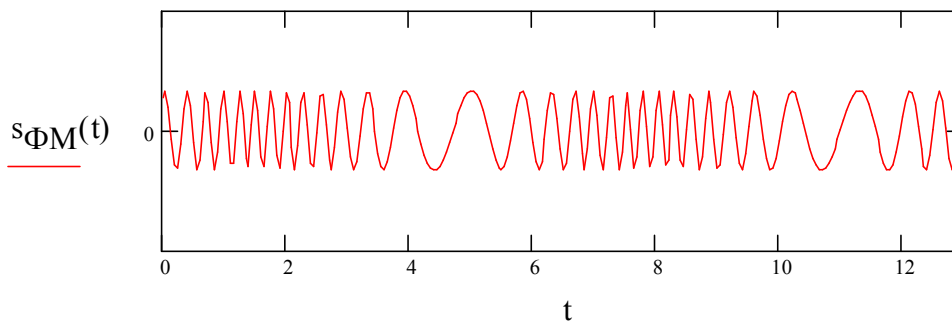
Аналитическое выражение однотонового ФМ сигнала

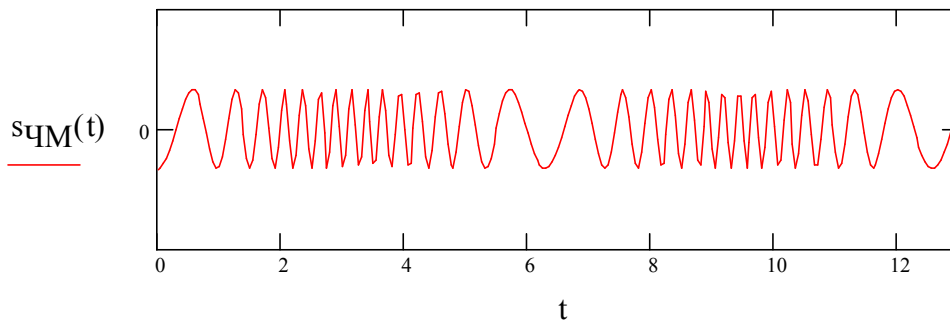
$$s_{\text{ФМ}}(t) := A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0 + m_{\text{ФМ}} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \Psi))$$

Аналитическое выражение однотонового ЧМ сигнала

$$s_{\text{ЧМ}}(t) := A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0 + m_{\text{ЧМ}} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \Psi))$$

Соответствующие временные диаграммы ФМ и ЧМ сигналов:





Дискретная модуляция гармонического несущего сигнала.

Дискретная модуляция является частным случаем модуляции гармонического несущего сигнала, когда модулирующий сигнал $u_M(t)$

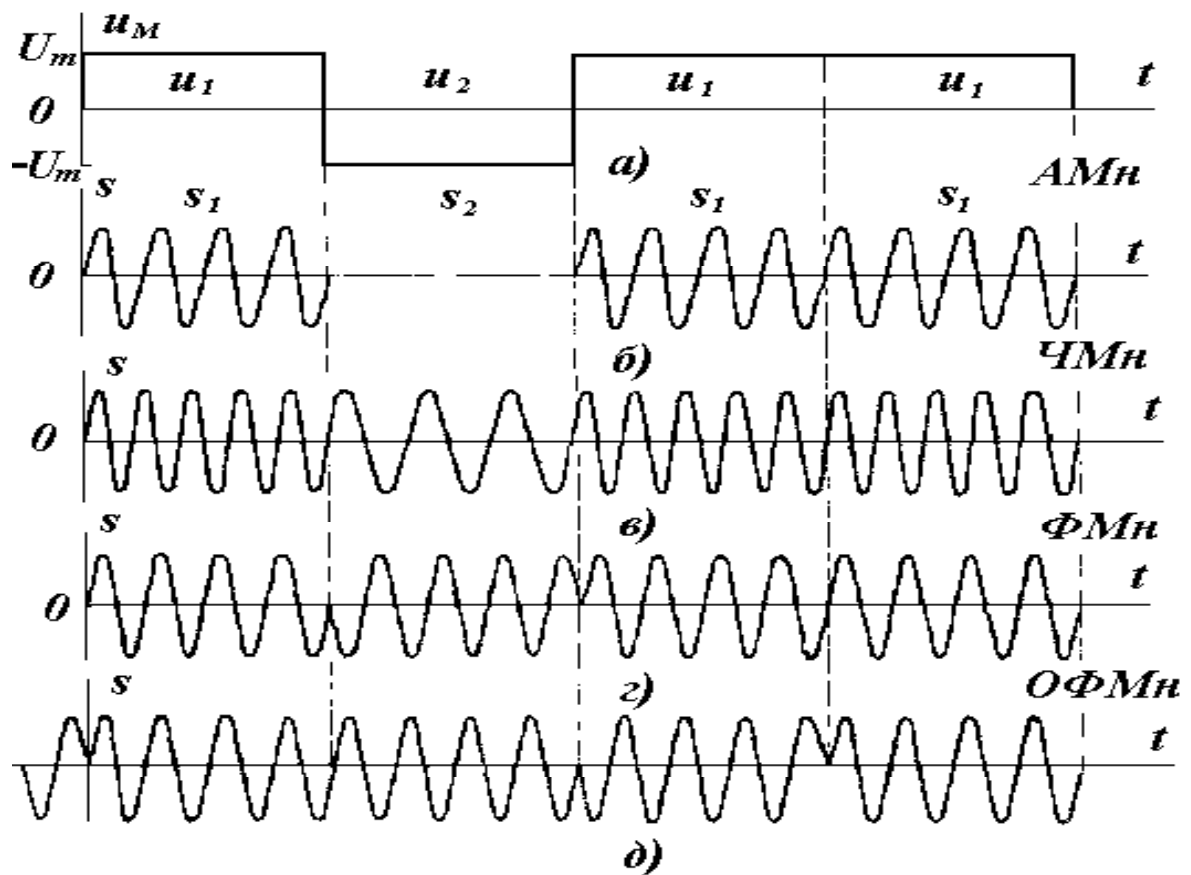


Рис.2.6.

дискретный. Управляя с помощью первичного сигнала параметрами гармонической несущей, можно получить соответственно амплитудную (АМн), частотную (ЧМн) и фазовую (ФМн) манипуляции.

При двоичном коде первичный сигнал принимает два значения — $u_1(t) = U_m$ и $u_2 = -U_m$, которые соответствуют символам вторичного алфавита 1 и 0.

Модулированный сигнал при этом также будет принимать два значения — $s_1(t)$ и $s_2(t)$. На рис. 2.6 приведены временные диаграммы различных видов модуляции. При АМн (рис. 2.6, б) первичному сигналу $u_1(t)$ соответствует

передача несущего колебания в течение t_u (посылка), сигналу $u_2(t)$ — отсутствие колебания (пауза), поэтому часто АМн называют манипуляцией с пассивной паузой. При ЧМн (рис. 2.6, в) несущее колебание с частотой $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega_D$ соответствует сигналу $u_1(t)$, а колебание с частотой $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_D$ — сигналу $u_2(t)$. Обычно разнос частот ($\omega_2 - \omega_1$) выбирают таким, чтобы спектры сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ мало перекрывались. При ФМн (рис. 2.6, г) девиация фазы $\Delta\varphi_D$ выбрана равной $\pi/2$, так как при этом обеспечивается наибольшее различие между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$, которые являются противоположными. В связи с этим при ФМн фаза несущей меняется на 180° при каждом переходе от $u_1(t)$ и $u_2(t)$ и наоборот.

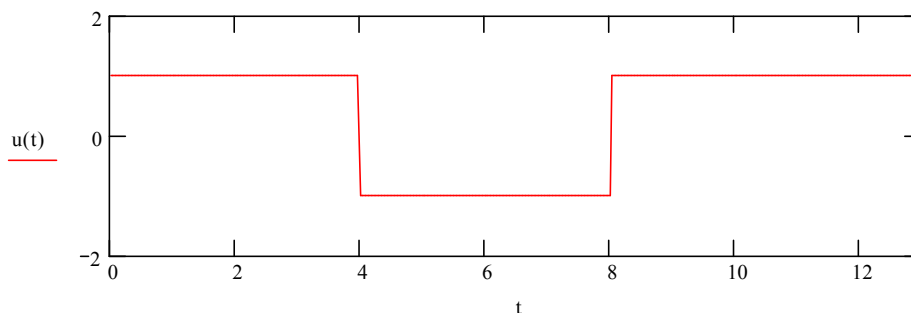
В настоящее время наряду с ФМн широко применяется относительная фазовая модуляция (ОФМн, (рис. 2.6, д)). Фаза несущего колебания в ОФМн изменяется на 180° при передаче символов 1 (сигнал u_1) и остается неизменной при передаче символов 0 (сигнал u_2).

Рассмотрим модуляцию дискретным сигналом в математическом приложении MathCAD – пример N 2.3.

Пример N 2.3. Рассмотрим амплитудную, фазовую и частотную модуляцию дискретного сигнала.

Модулирующий сигнал:

$$u(t) := [(t < 4) + (t > 8) \cdot (t < 13)] \cdot 2 - 1$$



Аналитические выражения:

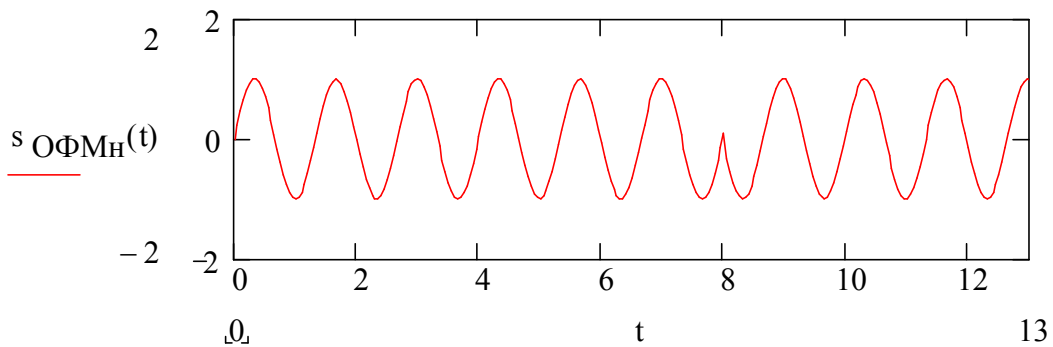
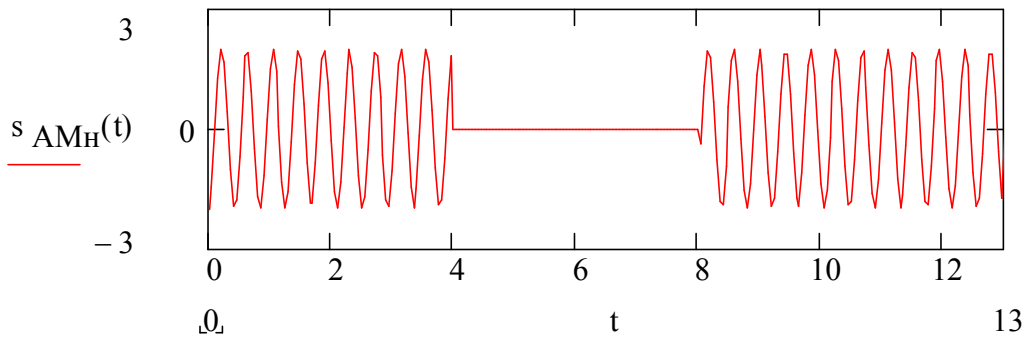
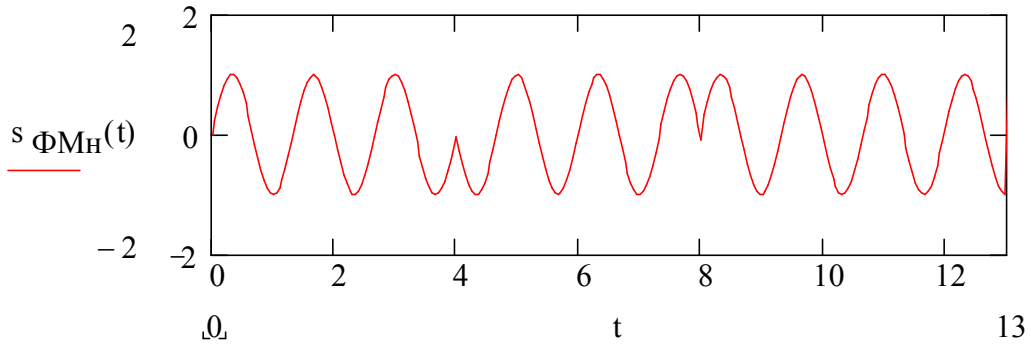
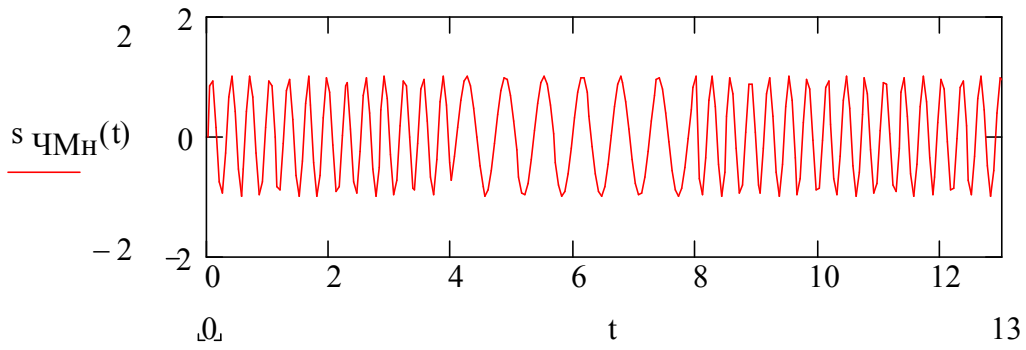
$$S_{\text{АМн}}(t) = A_0 (1 + M_2 u(t)) \cos(\omega_0 t + \psi_0)$$

$$S_{\text{ЧМн}}(t) = A_0 \cos[(5 + u(t) \omega_0)t + 3/2 \psi_0]$$

$$S_{\text{ФМн}}(t) = A_0 \cos[0.315 \omega_0 t + 3/2 \psi_0 u(t)]$$

$$S_{\text{ОФМн}}(t) = A_0 \cos[0.315 \omega_0 t - 5/2 \psi_0 u(t)]$$

Соответствующие временные диаграммы



Задания:

1). Рассмотреть при многотональном модулирующем сигнале, содержащем три или более гармоник разной частоты:

- а) амплитудную модуляцию;
- б) фазовую модуляцию;

- в) частотную модуляцию.
- 2). Рассмотреть при дискретном модулирующем сигнале, содержащем три импульса различной длины:
- амплитудную манипуляцию;
 - фазовую манипуляцию;
 - частотную манипуляцию;
 - относительную фазовую манипуляцию.
- 3). Рассмотреть разложение в ряд Фурье:
- АМ сигнал при однотональном модулирующем сигнале;
 - АМ сигнал при дискретном модулирующем сигнале;
 - ФМ сигнал при однотональном модулирующем сигнале;
 - ЧМ сигнал при однотональном модулирующем сигнале.

Лабораторная работа 3. Дифракция электромагнитных волн.

Принцип Гюйгенса – Френеля.

Дифракцией света называется совокупность явлений, обусловленных интерференцией вторичных волн. Последние возникают при распространении света в среде с резко выраженными неоднородностями (отверстия в непрозрачных экранах, границы непрозрачных тел и т. д.).

Для решения дифракционных задач – отыскание распределения на экране интенсивности световой волны, распространяющейся в среде с препятствиями, – применяются приближенные методы, основанные на принципах Гюйгенса и Гюйгенса – Френеля.

Согласно принципу Гюйгенса, каждую точку, в которую пришла волна от источника, можно принять за источник вторичных волн, распространяющихся во все стороны. Результирующая волна рассматривается как наложение вторичных волн. Гюйгенс считал, что отдельные вторичные волны не обладают периодичностью, что они очень слабы и заметное действие производят только на их огибающей. При таком произвольном допущении принцип Гюйгенса даёт лишь некоторый рецепт построения волновых фронтов. Построения Гюйгенса наглядно объясняют законы прямолинейного распространения, отражения и преломления света. Но в этих построениях не используется понятие длины световой волны, поэтому они не позволяют определить условия применимости упомянутых законов.

Френель вложил в принцип Гюйгенса ясное физическое содержание, отказавшись от искусственного предположения об огибающих вторичных волн и рассматривая полное световое поле как результат интерференции вторичных волн. При этом не только получает физическое объяснение рецепт Гюйгенса (к точкам на огибающей все вторичные волны приходят в одинаковых фазах), но и появляется возможность расчёта светового поля в пространстве. Изучая

распределение света вблизи границы между светом и тенью на основе принципа Гюйгенса – Френеля, можно получить количественное описание дифракционных явлений.

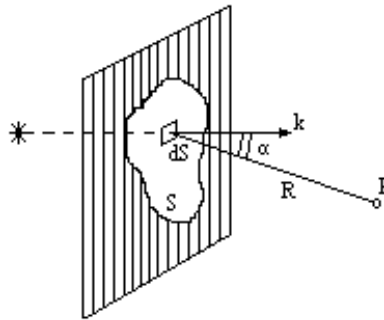


Рис. 3.1.

Рассмотрим какой-либо экран с отверстием, через которое проходит свет от данного источника (рис. 3.1). Источник пока будем считать точечным и монохроматическим. Размеры отверстия много больше длины волны света. Будем под \vec{E} понимать любую из компонент векторов \vec{E} или \vec{B} электромагнитного поля световой волны, опуская при этом множитель $e^{-i\omega t}$, определяющий зависимость от времени. Задача состоит в определении \vec{E}_P в любой точке P за экраном. При приближенном решении этой задачи по методу Френеля делается предположение, что напряженность \vec{E} в точках отверстия такова, какой она была бы в случае свободного распространения волны от источника вообще при отсутствии какого бы то ни было экрана, и что в точках, находящихся непосредственно за экраном, напряженность поля равна нулю. Очевидно, что в этом предположении совершенно не учитываются специфические свойства экрана (материала, из которого он сделан). Считается, что это не играет никакой роли. Существенна только форма края отверстия. Это предположение справедливо, когда размеры отверстия и расстояния до источника и точки наблюдения много больше длины волны.

Проведём мысленно произвольную поверхность S , закрывающую отверстие в экране и ограниченную краями отверстия (рис. 3.1). Разделим эту поверхность на элементарные участки площадью dS , малые по сравнению с размерами отверстия, но большие по сравнению с длиной волны. Можно считать, что каждый из этих участков сам становится источником световой волны, распространяющейся во все стороны. Напряжённость dE_p , создаваемая элементарным участком dS в точке P , пропорциональна напряжённости E в самом участке dS (какой она была бы при отсутствии экрана) и проекции dS_n площади dS этого участка на плоскость, перпендикулярную волновому вектору \vec{k} луча, пришедшего из источника света в dS . Последнее связано с тем, что при любой форме участка dS через него будут проходить одни и те же лучи от источника, если только проекция dS_n будет неизменной, а потому и вклад его в напряжённость в точке P будет тем же самым.

При вычислении вклада участка dS в E_p нужно учесть изменения амплитуды и фазы вторичной волны при её распространении от dS к P . Это приводит к появлению в выражении для dE_p множителя e^{ikR}/R , где R – расстояние от dS до P , а $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Таким образом,

$$dE_p = K(\alpha)E \frac{e^{ikR}}{R} dS_n \quad (3.1)$$

где $K(\alpha)$ – некоторый коэффициент наклона, учитывающий зависимость вторичных волн от угла α между вектором \vec{k} и направлением на точку наблюдения. Из теории Кирхгофа, основанной на том, что напряжённость поля световой волны удовлетворяет волновому уравнению, следует

$$K(\alpha) = k(1 + \cos \alpha)/(4\pi i) = (1 + \cos \alpha)/(2\lambda i) \quad (3.2)$$

и при малых углах дифракции ($\alpha \ll 1$) можно положить $\cos \alpha \approx 1$ и $K(\alpha) \approx k/(2\pi i) = -i\lambda$.

Полное поле в точке P представляет собой суперпозицию полей вторичных волн от всех элементов dS поверхности, закрывающей отверстие в экране:

$$E_p = \int_S K(\alpha)E \frac{e^{ikR}}{R} dS_n \quad (3.3)$$

В рассматриваемом приближении интеграл (3.3) по поверхности S не зависит от формы этой поверхности.

Формула (3.3) даёт математическое выражение принципа Гюйгенса - Френеля.

Дифракция Френеля от круглого отверстия.

Применим формулу (3.2) для определения напряжённости поля в точке P за круглым отверстием в экране. Будем считать, что точечный источник S и точка P лежат на прямой, проходящей через центр отверстия и перпендикулярной его плоскости (рис. 3.2). В качестве вспомогательной поверхности S выберем часть сферы радиусом r_0 с центром в источнике, проходящей через края отверстия. В соответствии с основным предположением напряжённость поля на ней будет такой же, как при отсутствии экрана. Она

одинакова на всех её элементах dS и равна

$$E = E_0 e^{ikr_0} \quad (3.4)$$

В качестве элемента dS удобно взять на сфере кольцо, все точки которого лежат на одинаковом расстоянии R от P . Площадь такого кольца $dS = dS_n = 2\pi r_0^2 \sin \varphi d\varphi$. Выберем R за переменную интегрирования в (3.3). Из рис. 3.2 видно, что

$R^2 = r_0^2 + (r_0 + R_0)^2 - 2r_0(r_0 + R_0)\cos\varphi$, где R_0 –

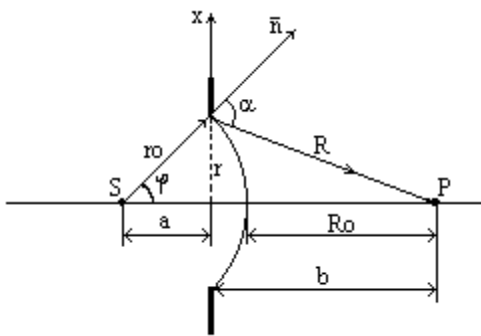


Рис.3.2.

расстояние от сферы до точки P . Дифференцируя это уравнение (при постоянных r_o и R_o), получаем $Rdr = r_o(r_o + R_o) \sin \varphi d\varphi$, откуда

$$dS_n = 2\pi \frac{r_o R}{r_o + R_o} dR. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), получаем

$$E_p = 2\pi \frac{r_o}{r_o + R_o} E_0 e^{ikr_o} \int_{R_o}^{R_m} K(R) e^{ikR} dR \quad (3.6)$$

Теперь найдём $K(R)$, для этого выразим $\cos \alpha$ через R , используя теорему косинусов: $(r_o + R_o)^2 = r_o^2 + R^2 + 2r_o R \cos \alpha$, откуда

$$\cos \alpha = \frac{(r_o + R_o)^2 - r_o^2 - R^2}{2Rr_o} \quad (3.7)$$

Подставим (3.7) в (3.2) и найдём $K(R)$, затем подставим его в (3.6).

При радиусе отверстия $r = \sqrt{m\lambda ab/(a+b)}$, если расстояния от источника до щели a и от щели до точки наблюдения b , и m – целое число, отверстие оставит открытым ровно m первых зон Френеля, построенных для точки P . Если m – четное, то в точке P наблюдается минимум интенсивности, если нечетное, то максимум.

Пример № 3.1. Рассмотрим дифракцию Френеля от круглого отверстия с помощью программы MathCAD.

Пусть на диафрагму радиусом r , падает сферическая световая волна (длина волны λ , амплитуда E_0), исходящая от точечного источника S , находящегося на расстоянии a от диафрагмы. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран на расстоянии b от диафрагмы. Пронаблюдаем за тем как будет изменяться интенсивность в точке P , если мы будем изменять расстояние b (уменьшать или увеличивать).

Радиус отверстия $r := 3$.

Расстояние от источника до диафрагмы

с отверстием..... $a := 5$

Расстояние от отверстия до экрана. $b := 15$

Длина волны $\lambda := 632.8 \cdot 10^{-4}$

Амплитуда колебаний $E_0 := 500$

Найдём радиус волнового фронта:

$$r_0 := \sqrt{r^2 + a^2} \quad r_0 = 5.831$$

Волновое число: $k := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$

Зададим порядок изменения b :

$$j := 0..2000$$

Чем больше j тем точнее будут вычисления.

Будем увеличивать расстояние от отверстия до экрана:

$$b_j := b + 0.05 \cdot j$$

Теперь зададим пределы интегрирования. Из рисунка видно, что

$$R_{mj} := \sqrt{(b_j)^2 + r^2} \quad R_{oj} := b_j - (r_0 - a)$$

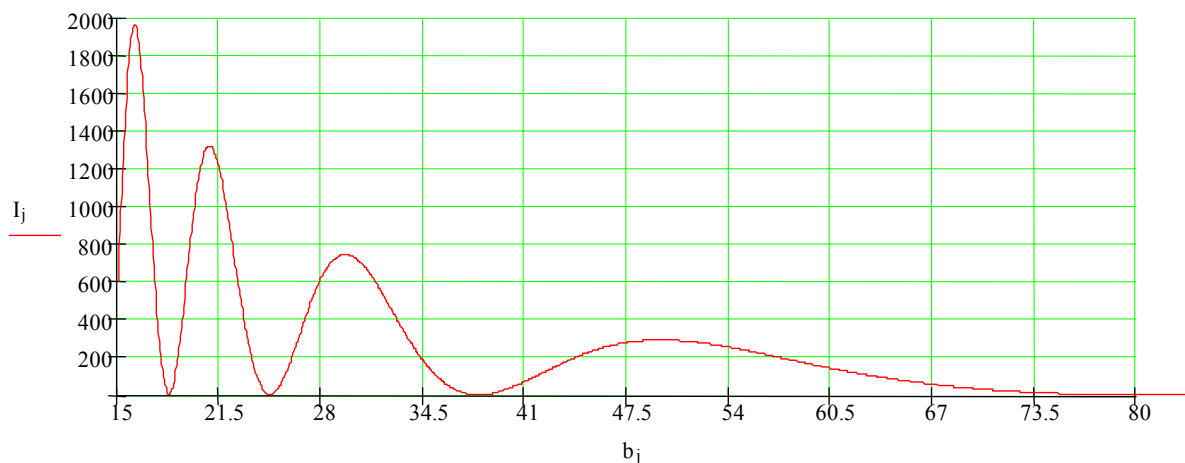
Используя принцип Гюйгенса - Френеля найдём результирующее колебание в точке P :

$$E_j := \frac{2 \cdot \pi \cdot r_0}{r_0 + R_{oj}} \cdot E_0 \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_0} \cdot \int_{R_{oj}}^{R_{mj}} \frac{1 + \left[\frac{(a + b_j)^2 - (R^2 + r_0^2)}{2 \cdot r_0 \cdot R} \right]}{2 \cdot \lambda \cdot i} \cdot e^{-i \cdot k \cdot R} dR$$

$B =$

| | 0 |
|----|-------------------|
| 0 | -43.963+135.909i |
| 1 | -152.647-14.887i |
| 2 | -19.105-162.328i |
| 3 | 163.685-56.176i |
| 4 | 94.191+155.945i |
| 5 | -138.886+130.849i |
| 6 | -163.826-112.873i |
| 7 | 78.849-190.923i |
| 8 | 210.207+38.291i |
| 9 | 6.868+220.139i |
| 10 | -219.681+54.346i |
| 11 | -101.643-208.365i |
| 12 | 186.342-146.187i |
| 13 | 185.484+154.379i |
| 14 | -113.831+217.273i |
| 15 | -239.656-66.567i |

Найдём интенсивность колебаний (квадрат напряжённости) в точке P и построим её график:



Сделаем проверку размерности:

$$r := 1 \cdot \text{cm}$$

$$a := 5 \cdot \text{cm}$$

$$b := 20 \cdot \text{cm}$$

$$\lambda := 632.8 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}$$

$$E_0 := 500 \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$k := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

$$k = 99.292 \frac{1}{\text{m}}$$

$$r_o := \sqrt{r^2 + a^2} \quad r_o = 0.051 \text{ m}$$

$$R_m := \sqrt{(b)^2 + r^2} \quad R_m = 0.2 \text{ m}$$

$$R_o := b - (r_o - a) \quad R_o = 0.199 \text{ m}$$

$$E := \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{r_o + R_o} \cdot E_0 \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_o} \cdot \int_{R_o}^{R_m} \frac{1 + \left[\frac{(a+b)^2 - (R^2 + r_o^2)}{2 \cdot r_o \cdot R} \right]}{2 \cdot \lambda \cdot i} \cdot e^{-i \cdot k \cdot R} dR$$

$$E = 3.061 - 12.071i \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Дифракция Френеля от круглого диска.

Поместим между источником света S и точкой наблюдения P круглый непрозрачный диск радиусом r , находящийся на расстоянии a от источника, и на расстоянии b от точки наблюдения. Пронаблюдаем за тем как будет изменяться интенсивность в точке P , если мы будем изменять расстояние b (уменьшать или увеличивать). Решение этой задачи аналогично решению задачи о дифракции от круглого отверстия. Поменяются только границы интегрирования. Из рисунка 3.3 видно, что

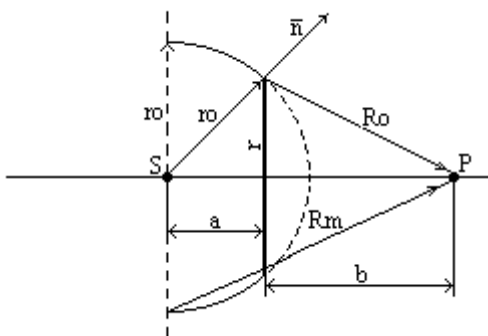


Рис.3.3.

$$R_o = \sqrt{r^2 + b^2}, \quad a \quad R_m = \sqrt{r_o^2 + (a+b)^2}$$

Пример № 3.2. Рассмотрим дифракцию Френеля от круглого диска с помощью программы MathCAD.

Радиус диска

$$r := 10$$

Расстояние от источника до диска

$$a := 3$$

Расстояние от диска до экрана

$$b := 20$$

Длина волны

$$\lambda := 632.8 \cdot 10^{-4}$$

Амплитуда колебаний

$$E_0 := 500$$

Найдём радиус волнового фронта:

$$r_o := \sqrt{r^2 + a^2} \quad r_o = 10.44$$

Волновое число:

$$k := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

Зададим порядок изменения b :

$$j := 0..2000$$

Будем увеличивать расстояние от отверстия до экрана: $b_j := b + 0.05 \cdot j$

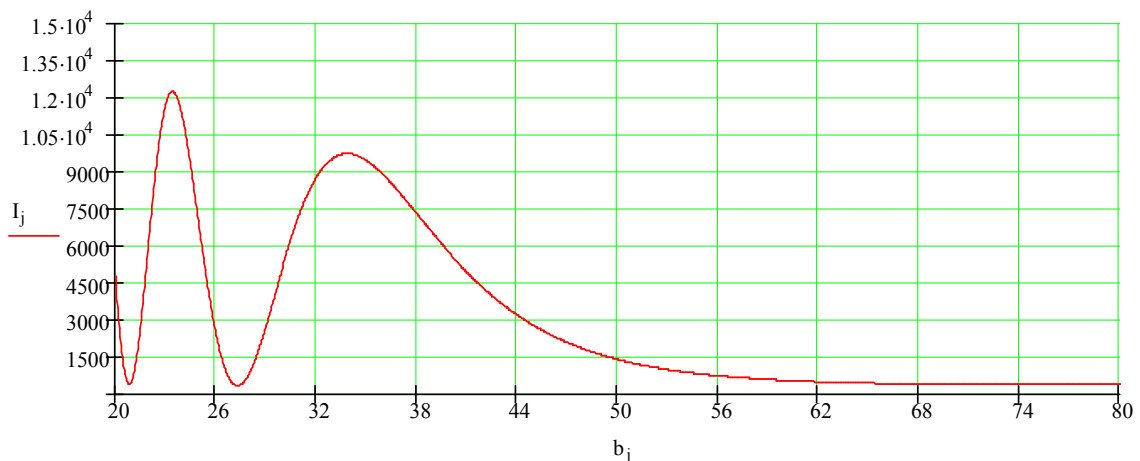
Теперь зададим пределы интегрирования. Из рисунка видно, что

$$R_{mj} := \sqrt{(b_j + a)^2 + r_0^2} \quad R_{0j} := \sqrt{r^2 + (b_j)^2}$$

Используя принцип Гюйгенса - Френеля найдём результирующее колебание в точке P :

$$E_j := \frac{2 \cdot \pi \cdot r_0}{r_0 + R_{0j}} \cdot E_0 \cdot e^{-i \cdot k \cdot r_0} \cdot \int_{R_{0j}}^{R_{mj}} \frac{1 + \left[\frac{(a + b_j)^2 - (R^2 + r_0^2)}{2 \cdot r_0 \cdot R} \right]}{2 \cdot \lambda \cdot i} \cdot e^{-i \cdot k \cdot R} dR$$

Теперь найдём интенсивность колебаний в точке P и построим её график: $I_j := E_j \cdot |E_j| \cdot e^{-1 \cdot i \cdot \arg(E_j)}$



Дифракция Фраунгофера на щели.

Пусть на бесконечно длинную (практически достаточно, чтобы длина щели была во много раз больше, чем ширина) щель падает плоская световая волна. Поместим за щелью линзу, а в фокальной плоскости линзы – экран.

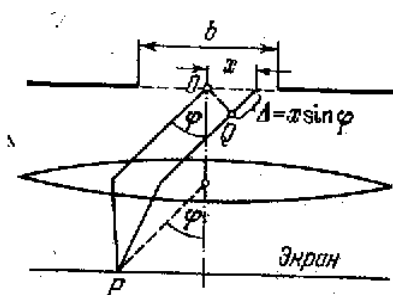


Рис. 3.4.

Волновая поверхность падающей волны, плоскость щели и экран параллельны друг другу. Поскольку щель бесконечна, картина, наблюдаемая в любой плоскости, перпендикулярной к щели, будет одинакова. Поэтому достаточно исследовать характер картины в одной такой плоскости, например в плоскости рисунка 3.4. Все вводимые в дальнейшем величины, в частности угол φ , образуемый лучом с оптической осью линзы, относятся к этой плоскости. Разобьём открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели элементарные зоны

ширины dx . Вторичные волны, посылаемые зонами в направлении, определяемом углом φ , соберутся в точке P экрана. Каждая элементарная зона создаст в точке P колебание dE . Линза собирает в фокальной плоскости плоские (а не сферические) волны. Поэтому множитель $1/R$ как в (3.1) в случае дифракции Фраунгофера будет отсутствовать. Ограничившись рассмотрением не слишком больших углов φ , можно считать коэффициент K в формуле (3.1) постоянным. Тогда амплитуда колебаний, возбуждаемого зоной в любой точке экрана будет зависеть только от площади зоны. Площадь пропорциональна ширине зоны dx . Следовательно, амплитуда dA колебания dE , возбуждаемого зоной шириной dx в любой точке экрана, имеет вид $dA = Cdx$, где C – константа.

Обозначим алгебраическую сумму амплитуд колебаний, возбуждаемых в некоторой точке экрана всеми зонами, через A_0 . Её можно найти, проинтегрировав dA по всей ширине щели b : $A_0 = \int dA = \int_0^b Cdx = Cb$. Отсюда

$$C = A_0 / b \text{ и, следовательно, } dA = \frac{A_0}{b} dx .$$

Теперь определим фазовые соотношения между колебаниями dE . Сопоставим фазы колебаний, возбуждаемых в точке P элементарными зонами с координатами O и x (рис. 3.4). Оптические пути OP и QP таутохронны. Поэтому разность фаз между рассматриваемыми колебаниями образуется на пути $\Delta = x \sin \varphi$. Если начальную фазу колебания, возбуждаемого в точке P элементарной зоной, находящейся в середине щели, положить равной нулю, то начальная фаза колебания, возбуждаемого зоной с координатой x , будет равна

$$-2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi .$$

Таким образом, колебание, возбуждаемое элементарной зоной с координатой x в точке P (положение которой определяется углом φ), может быть представлено в виде

$$dE_{\varphi} = \left(\frac{A_0}{b} dx \right) e^{-ikx \sin \varphi} \quad (3.7)$$

(имеется в виду вещественная часть этого выражения).

Проинтегрировав выражение (3.7) по всей ширине щели, найдём результирующее колебание, возбуждаемое в точке P открываемом щелью участком волновой поверхности:

$$E_{\varphi} = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{b} e^{-ikx \sin \varphi} dx \quad (3.8)$$

Условие максимумов интенсивности для щели можно записать в виде $b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, а минимумов $b \sin \varphi = m\lambda$, где $m = \pm 1, 2, 3, \dots$ – порядок максимума (минимума).

Пример № 3.3. Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от щели с помощью программы MathCAD.

Пусть на бесконечно длинную щель шириной b нормально падает плоская световая волна. Рассмотрим, как будет изменяться интенсивность на экране при изменении угла дифракции φ . Считаем, что амплитуда результирующего колебания в точке наблюдения равна A_0 .

Ширина щели

$$b := 0.2$$

Длина волны

$$\lambda := 632.8 \cdot 10^{-6}$$

Амплитуда колебаний.

$$A_0 := 1$$

Волновое число:

$$k := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

Зададим значения дифракционного угла:

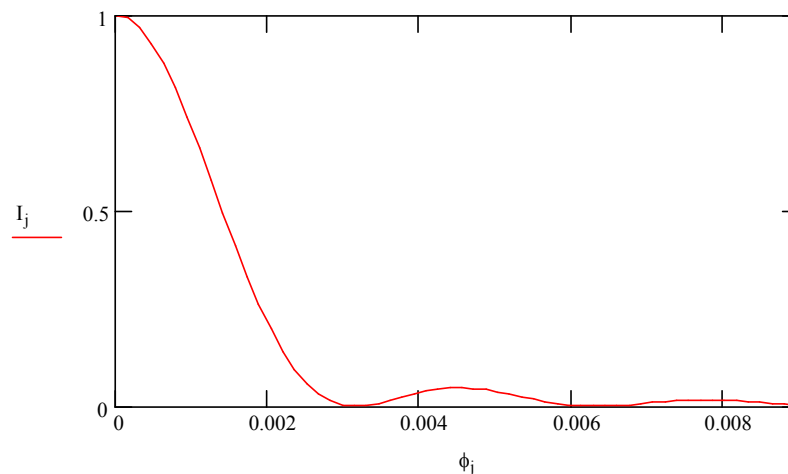
$$\phi_j := \frac{0.009 \cdot j \cdot \pi}{180} \quad j := 0..60$$

Подсчитаем напряженность при различных значениях дифракционного угла:

$$E_j := \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{A_0}{b} \cdot e^{-i \cdot x \cdot \sin(\phi_j) \cdot k} dx$$

Теперь найдём интенсивность колебаний в точке P и построим её график:

$$I_j := E_j \cdot |E_j| \cdot e^{-1 \cdot i \cdot \arg(E_j)}$$



Заметим, что при наклонном падении света под углом φ_0 (рис. 3.5) разность хода между крайними интерферирующими лучами $AB-CD$ составляет

$$\Delta = b(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \quad (3.9).$$

В этом случае формула (3.8) примет вид

$$E_\varphi = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{b} e^{-ikx(\sin \varphi - \sin \varphi_0)} dx \quad (3.10)$$

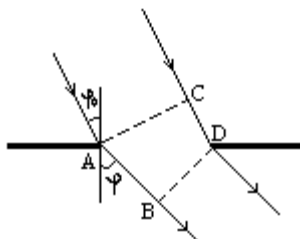


Рис. 3.5.

Условия для максимумов и минимумов интенсивности примут вид в соответствии с формулой (3.9).

Дифракция Фраунгофера от нескольких щелей.

Дифракционной решеткой называется совокупность большого числа одинаковых щелей, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние (рис. 3.6). Расстояние d между серединами соседних щелей называется периодом решетки.

Расположим параллельно решетке собирающую линзу, в фокальной плоскости которой поставим экран. Выясним характер дифракционной картины, получающейся на экране при падении на решетку плоской световой волны (для простоты будем считать, что волна падает на решетку нормально). Каждая из щелей даст на экране картину. Картины от всех щелей придутся на одно и то же место экрана (независимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку P от различных щелей, были бы некогерентными, результирующая картина от N щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью лишь тем, что все интенсивности возросли бы в N раз. Однако колебания от различных щелей являются в большей или меньшей степени когерентными, поэтому результирующая интенсивность будет отлична от $N I_\varphi$ (I_φ – интенсивность, создаваемая одной щелью). В дальнейшем будем предполагать, что радиус когерентности падающей волны намного превышает длину решетки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными друг относительно друга. В этом случае результирующее колебание в точке P , положение которой определяется углом φ , представляет собой сумму N колебаний с одинаковой амплитудой A_φ , сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину δ . Интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реу}} = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (3.11)$$

Из рисунка 3.6 видно, что разность хода от соседних щелей равна $\Delta = d \sin \varphi$. Следовательно, разность фаз равна

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi.$$

Условие главных максимумов интенсивности для дифракционной решетки

$d \sin \varphi = m\lambda$, где $m = \pm 1, 2, 3, \dots$ – номер главного максимума, а d – период решетки.

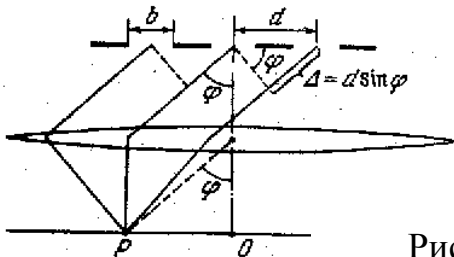


Рис 3.6.

Задания:

1) Рассмотреть дифракцию Френеля на диске для разных значений радиуса диска. Осуществить проверку полученных результатов с помощью зон Френеля.

2) Рассмотреть дифракцию Френеля на отверстии в виде кольца. Осуществить проверку полученных результатов с помощью зон Френеля.

3) Рассмотреть дифракцию Фраунгофера от щели при падении плоской световой волны под углом φ_0 .

4) Рассмотреть дифракцию Фраунгофера от N щелей при падении волны под углом φ_0 .

5) Рассмотреть дифракцию Фраунгофера от края непрозрачного прямого экрана.

Лабораторная работа 4. Законы отражения и преломления света.

Для получения законов отражения и преломления света рассмотрим идеализированный случай бесконечной плоской границы раздела двух неподвижных однородных изотропных сред, каждая из которых занимает целое полупространство. Пусть в одной из этих сред задана проходящая из бесконечности плоская монохроматическая волна. Эта падающая на границу волна порождает волновой процесс в обеих средах.

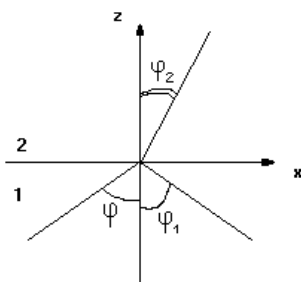


Рис. 4.1

Полное электромагнитное поле, включающее падающую, отраженную и преломленную волны, должно удовлетворять определенным граничным условиям, которые

могут быть получены предельным переходом из уравнения Максвелла. Эти условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{B} на границе (при отсутствии поверхностных токов на границе).

На рис. 4.1 показаны направления рассматриваемых волн. Все величины, относящиеся к распространяющимся в первой среде с показателем преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ падающей и отраженной волнам, будем отмечать, соответственно, индексами 0 и 1, а к преломленной волне во второй среде с показателем преломления $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ -- индексом 2. Первую среду считаем прозрачной, для второй среды такого предположения пока делать не будем. Для каждой из трех плоских волн используем комплексную запись. Таким образом на границе

$$\begin{aligned} E_{0\tau} e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} + E_{1\tau} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)} &= E_{2\tau} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)}, \\ B_{0\tau} e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} + B_{1\tau} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)} &= B_{2\tau} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Чтобы граничные условия выполнялись в любой момент времени, коэффициенты при t в показателях экспонент для всех трех волн должны быть одинаковы. Поэтому частоты отраженной и преломленной волн равны частоте ω падающей волны, что, впрочем, очевидно, если эти волны рассматривать как результат сложения вторичных волн, излучаемых зарядами вещества при их вынужденном движении.

Направим ось Z перпендикулярно границе раздела. Углы $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, образуемые волнами с осью Z , называют углами падения, отражения и преломления. Граничные условия должны выполняться сразу во всех точках границы раздела. Это возможно тогда, когда зависимость E_τ и B_τ от координат точки плоскости XOY у всех трех волн одинакова, то есть равны тангенциальные компоненты k_x, k_y их волновых векторов. Отсюда следует, что направления распространения всех трех волн лежат в одной плоскости, проходящей через ось Z (плоскость падения). Выберем в качестве нее плоскость XOY (рис.4.1). Таким образом,

$$\begin{aligned} k_{1x} = k_{2x} = k_{0x} &= (\omega/c)n_1 \sin \varphi \\ k_{1z} = -k_{0z} &= -\frac{\omega}{c}n_1 \cos \varphi, \\ k_{2z} &= \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Величина k_{2z} в поглощающей среде (при комплексном значении ε_2) комплексна. Она будет комплексной (чисто мнимой) и в прозрачной среде, если $\sin^2 \varphi > \varepsilon_2/\varepsilon_1$ (условие полного отражения).

Если вторая среда прозрачна и $\sin \varphi < \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n_2/n_1$, то из (4.2) следуют законы отражения и преломления света, определяющие направления отраженной и преломленной волн.

$$\varphi_1 = \varphi, \quad n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \varphi_2 \quad (4.3)$$

Эти законы получены относительно комплексных амплитуд E_τ и поэтому справедливы при любом состоянии поляризации падающей волны.

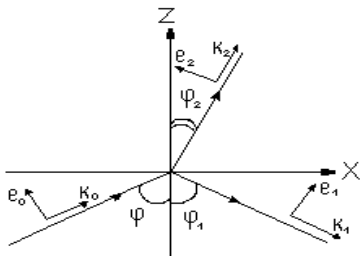


Рис. 4.2

Формулы Френеля.

Граничные условия (4.1) позволяют определить не только направления отраженной и преломленной волн, но и их амплитуды и

состояния поляризации.

Разложим каждую из трех волн в (4.1) на две составляющие: поляризованную в плоскости падения (индекс \parallel) и поляризованную в

перпендикулярном плоскости падения направлении (индекс \perp). Для векторов \vec{E} и \vec{B} , лежащих в плоскости падения, условимся выбирать положительные направления в каждой из волн так, как показано на рис. 4.2. В перпендикулярной плоскости положительное направление задается единичным вектором \vec{j} , направленным вдоль оси y . Таким образом, $\vec{E}_0^\perp = E_0^\perp \vec{j}$, $\vec{E}_0^\parallel = E_0^\parallel \vec{e}_0$, и так далее. Вектор \vec{B} , в каждой из трех волн выражается через соответствующий вектор \vec{E} с помощью соотношения $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$, что дает следующую связь между амплитудами $\vec{E}^\parallel, \vec{E}^\perp$ и $\vec{B}^\parallel, \vec{B}^\perp$:

$$\begin{aligned} \vec{B}_0^\perp &= n_1 E_0^\perp \vec{e}_0, & \vec{B}_1^\perp &= n_1 E_1^\perp \vec{e}_1, & \vec{B}_2^\perp &= n_2 E_2^\perp \vec{e}_2, \\ \vec{B}_0^\parallel &= -n_0 E_0^\parallel \vec{j}, & \vec{B}_1^\parallel &= -n_1 E_1^\parallel \vec{j}, & \vec{B}_2^\parallel &= -n_2 E_2^\parallel \vec{j}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя соотношения (4.4), граничных условия (4.1) можно переписать так, чтобы в них входили амплитуды напряженностей только электрических полей каждой из волн. Учитывая, что $e_{0x} = \cos \varphi$, $e_{1x} = -\cos \varphi$, $e_{2x} = \cos \varphi_2$, получаем:

$$\begin{aligned} E_0^\perp + E_1^\perp &= E_2^\perp, \\ n_1 \cos \varphi (E_0^\perp - E_1^\perp) &= n_2 \cos \varphi_2 E_2^\perp, \\ n_1 (E_0^\parallel + E_1^\parallel) &= n_2 E_2^\parallel, \\ \cos \varphi (E_0^\parallel - E_1^\parallel) &= \cos \varphi_2 E_2^\parallel, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заметим, что эти уравнения распадаются на две группы, одна из которых содержит только компоненты E^\perp , другая – компоненты E^\parallel , то есть E_1^\perp и E_2^\perp выражаются только через E_0^\perp и не зависят от E_0^\parallel , и наоборот. Это значит, что волны указанных двух типов можно рассматривать независимо друг от друга. Уравнения (4.5) можно разрешить относительно компонент отраженной и преломленной волн, выразив их через компоненты падающей волны:

$$E_1^\perp = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi_2} E_0^\perp, \quad E_2^\perp = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi_2} E_0^\perp, \quad (4.6)$$

$$E_1^\parallel = \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi_2}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi_2} E_0^\parallel, \quad E_2^\parallel = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi_2} E_0^\parallel, \quad (4.7)$$

Эти соотношения, называемые формулами Френеля, полностью определяют характеристики отраженной и преломленной волн. Их обычно пишут в несколько иной форме, которую можно получить из (4.6) и (4.7), исключив n_1/n_2 с помощью закона преломления (4.3):

$$E_1^\perp = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)} E_0^\perp, \quad E_1^\parallel = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_2}{\sin(\varphi + \varphi_2)} E_0^\perp, \quad (4.8)$$

$$E_1^{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_2)} E_0^{\parallel}, \quad E_2^{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_2}{\sin(\varphi + \varphi_2) \cos(\varphi - \varphi_2)} E_0^{\parallel}. \quad (4.9)$$

В случае нормального падения $\varphi=0$ и, следовательно, $\varphi_2=0$. Тогда соотношения (4.6, 4.7) принимают вид:

$$\begin{aligned} E_1 &= (n_1 - n_2) E_0 / (n_1 + n_2), \\ E_2 &= 2 n_1 E_0 / (n_1 + n_2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

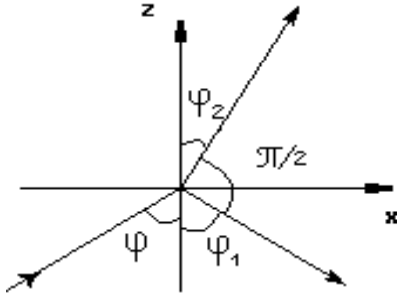


Рис.4.3.

Угол Брюстера.

Угол Брюстера определяется из условия $\varphi_{Br} + \varphi_2 = \pi/2$: при падении света под таким углом направления отраженной и преломленной волн взаимно перпендикулярны (рис. 4.3). Из формулы (4.9), содержащей в знаменателе $\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_2)$, видно, что при $\varphi = \varphi_{Br}$ получается $E_1^{\parallel} = 0$: отраженной волны не будет, если падающий под углом φ_{Br} свет поляризован в плоскости падения. Отсюда следует, что отражение естественного света, который можно представить как некогерентную смесь двух линейно поляризованных волн с ортогональными направлениями поляризации, обладает замечательным свойством: при падении естественного света под углом $\varphi = \varphi_{Br}$ отразится только составляющая, поляризованная перпендикулярно плоскости падения, и отраженный свет будет полностью линейно поляризованным. В этом состоит закон Брюстера, открытый экспериментально в 1815 году. Угол φ_{Br} называется еще углом полной поляризации. Из закона преломления получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_{Br} = n_2 / n_1 \quad (4.11)$$

Введем, по определению, коэффициент отражения R границы как отношение среднего по времени отраженного от поверхности потока энергии к падающему потоку. Коэффициент отражения тем меньше, чем ближе показатели преломления граничащих сред. При $n_1 = n_2$ отражение вообще отсутствует. Для света, поляризованного в плоскости падения и перпендикулярно ей, коэффициенты отражения будут определяться по формулам:

$$R^{\perp} = \frac{\sin^2(\varphi - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi + \varphi_2)}, \quad R^{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \varphi_2)} \quad (4.12)$$

При отражении от оптически менее плотной среды ($n_2 < n_1$) оба коэффициента обращаются в единицу уже при угле падения $\varphi = \varphi_m$, где $\sin \varphi_m = n_2 / n_1$. Угол φ_m называется предельным углом полного отражения. При $\varphi = \varphi_m$ угол преломления $\varphi_2 = \pi/2$, то есть преломленная волна

распространяется параллельно границе раздела. Отражение под углами $\varphi > \varphi_m$ требует особого рассмотрения, так как k_{2z} в (4.2) становится чисто мнимым, то есть поле во второй среде затухает. Затухание волны при отсутствии поглощения (диссипации энергии) означает, что на границе происходит полное отражение падающей волны.

При $\varphi > \varphi_m$ волновой вектор k_2 волны во второй среде имеет вещественную проекцию k_{2x} на направление границы и мнимую проекцию k_{2z} на направление нормали: формулы (4.2) для этого случая дают

$$k_{2x} = n_1 \omega \sin \varphi / c, \quad k_{2z} = \pm i \omega \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2} / c \quad (4.13)$$

Это значит, что электромагнитное поле во второй (оптически менее плотной) среде представляет собой неоднородную волну, у которой поверхности постоянной фазы – это плоскости $x = const$, перпендикулярные границе, а поверхности постоянной амплитуды – плоскости $z = const$, параллельные границе раздела. Знак перед корнем в (4.13) определяется из требования, чтобы при удалении от границы раздела амплитуда этой неоднородной волны уменьшалась. Только такое решение имеет физический смысл. Подставляя k_{2x} и k_{2z} из (4.13) в выражение $\vec{E}_2 \exp i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)$, получаем

$$\vec{E}_2 e^{-z/l} e^{i(k_{2x}x - \omega t)}, \quad l = c / (\omega \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2}). \quad (4.14)$$

Убыванию амплитуды в направлении оси z соответствует знак «+» в (4.13). Величина l характеризует глубину проникновения волны во вторую среду: на этом расстоянии от границы амплитуда волны убывает в e раз. По существу, волну во второй среде можно считать поверхностной: ее амплитуда заметна только на расстоянии нескольких длин волн от граничной поверхности.

Пример N 4.1. Рассмотрим отношение амплитуд отраженной и падающей волн в случае $n_1 < n_2$.

Дано: Показатели преломления: $n_1 = 1.3$, $n_2 = 1.5$.

Угол падения

Амплитуды

$$\phi := 0, \frac{\pi}{96} \cdot \frac{\pi}{2.0001}$$

Перпендикулярной

$$E_{01} := 10$$

Параллельной

$$E_{02} := 20$$

составляющих падающей волны.

$$i := 0..10$$

Решение: Находим угол преломления по закону преломления $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$.

$$\psi(\phi) := \text{asin} \left(\frac{\sin(\phi) \cdot n_1}{n_2} \right)$$

Отсюда следует, что

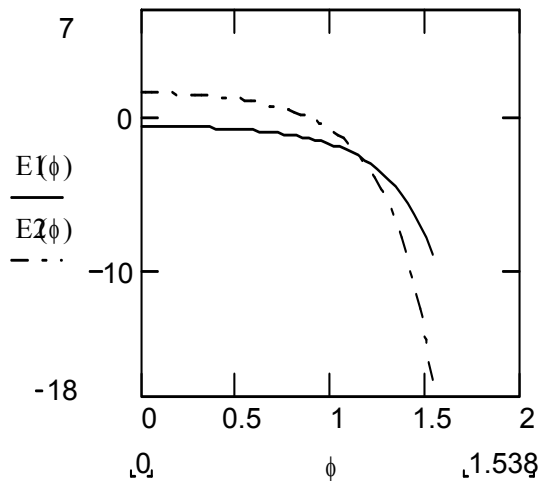
Используя формулы Френеля:

$$E1(\phi) := \frac{n_1 \cdot \cos(\phi) - n_2 \cdot \cos(\psi(\phi))}{n_1 \cdot \cos(\phi) + n_2 \cdot \cos(\psi(\phi))} \cdot E_{01}$$

$$E2(\phi) := \frac{n_2 \cdot \cos(\phi) - n_1 \cdot \cos(\psi(\phi))}{n_2 \cdot \cos(\phi) + n_1 \cdot \cos(\psi(\phi))} \cdot E_{02}$$

найдем амплитуды перпендикулярной (E1) и параллельной (E2) составляющих отраженной волны.

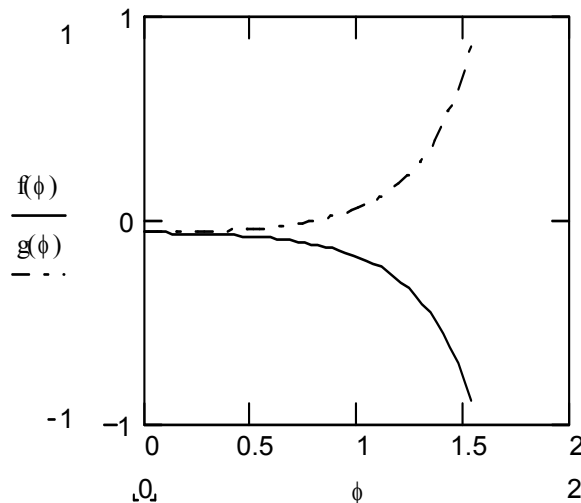
| $E1(\phi) =$ | $E2(\phi) =$ |
|--------------|--------------|
| -0.714 | 1.429 |
| -0.715 | 1.427 |
| -0.717 | 1.423 |
| -0.72 | 1.417 |
| -0.725 | 1.407 |
| -0.731 | 1.395 |
| -0.739 | 1.38 |
| -0.748 | 1.362 |
| -0.758 | 1.34 |



Найдем отношение амплитуд отраженной и падающей волн

$$f(\phi) := \frac{E1(\phi)}{E_{01}} \quad g(\phi) := -\frac{E2(\phi)}{E_{02}}$$

| $f(\phi) =$ | $g(\phi) =$ |
|-------------|-------------|
| -0.071 | -0.071 |
| -0.071 | -0.071 |
| -0.072 | -0.071 |
| -0.072 | -0.071 |
| -0.072 | -0.07 |
| -0.073 | -0.07 |
| -0.074 | -0.069 |
| -0.075 | -0.068 |
| -0.076 | -0.067 |
| -0.077 | -0.066 |
| -0.078 | -0.064 |
| -0.08 | -0.063 |
| -0.082 | -0.061 |
| -0.084 | -0.059 |
| -0.086 | -0.057 |
| -0.088 | -0.054 |



Пример N 4.2. Рассмотрим отношение амплитуд отраженной и падающей волн в случае $n_1 > n_2$.

Дано: Показатели преломления: $n_1=1.8$, $n_2=1.5$.

Угол падения $\phi := 0, \frac{\pi}{96} .. \frac{\pi}{2.0001}$
 Амплитуды перпендикулярной $E_{01} := 10$
 параллельной $E_{02} := 20$ составляющих падающей волны
 $i := 0 .. 10$

Решение: Находим угол преломления по закону преломления $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \phi}{\sin \psi}$.

Отсюда следует, что

$$\psi(\phi) := \text{asin}\left(\frac{\sin(\phi) \cdot n_1}{n_2}\right)$$

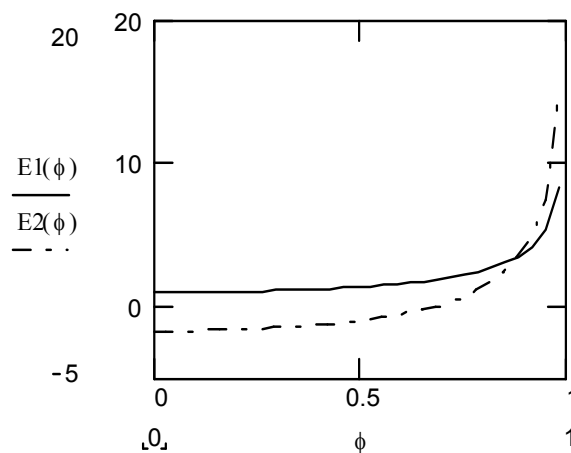
Используя формулы Френеля:

$$E1(\phi) := \frac{n_1 \cdot \cos(\phi) - n_2 \cdot \cos(\psi(\phi))}{n_1 \cdot \cos(\phi) + n_2 \cdot \cos(\psi(\phi))} \cdot E_{01}$$

$$E2(\phi) := \frac{n_2 \cdot \cos(\phi) - n_1 \cdot \cos(\psi(\phi))}{n_2 \cdot \cos(\phi) + n_1 \cdot \cos(\psi(\phi))} \cdot E_{02}$$

найдем амплитуды перпендикулярной (E1) и параллельной (E2) составляющих отраженной волны.

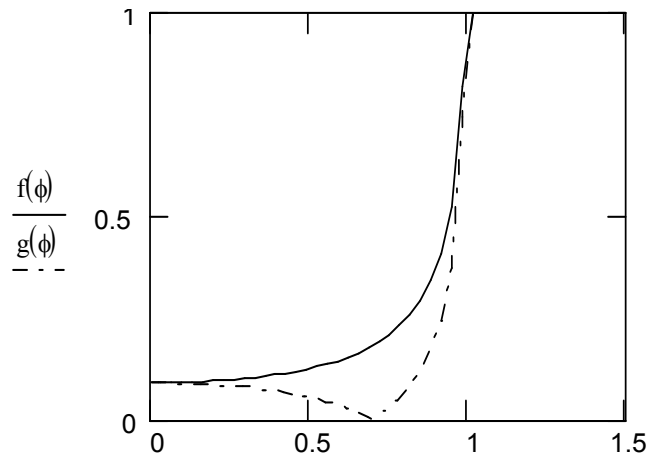
| $E1(\phi) =$ | $E2(\phi) =$ |
|--------------|--------------|
| 0.909 | -1.818 |
| 0.91 | -1.816 |
| 0.914 | -1.809 |
| 0.92 | -1.797 |
| 0.928 | -1.78 |
| 0.939 | -1.758 |
| 0.953 | -1.731 |
| 0.969 | -1.698 |
| 0.989 | -1.659 |



Найдем отношение амплитуд отраженной и падающей волн

$$f(\phi) := \frac{E1(\phi)}{E_{01}} \quad g(\phi) := -\frac{E2(\phi)}{E_{02}}$$

| $f(\phi) =$ | $g(\phi) =$ |
|-------------|-------------|
| 0.091 | 0.091 |
| 0.091 | 0.091 |
| 0.091 | 0.09 |
| 0.092 | 0.09 |
| 0.093 | 0.089 |
| 0.094 | 0.088 |
| 0.095 | 0.087 |
| 0.097 | 0.085 |
| 0.099 | 0.083 |
| 0.101 | 0.081 |
| 0.104 | 0.078 |
| 0.107 | 0.075 |
| 0.11 | 0.071 |
| 0.114 | 0.067 |
| 0.119 | 0.063 |
| 0.124 | 0.058 |



Пример N 4.3. Рассмотрим случай полного отражения.

Дано:

Показатели преломления: $n_1=1.5$, $n_2=1$.

Угол падения

$$\phi := 0, \frac{\pi}{96} .. \frac{\pi}{2.0001}$$

Амплитуды перпендикулярной

$$E_{01} := 10$$

параллельной

$$E_{02} := 20$$

составляющих падающей волны

$$i := 0 .. 10$$

Решение: Находим угол преломления по закону преломления $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$.

$$\psi(\phi) := \text{asin}\left(\frac{\sin(\phi) \cdot n_1}{n_2}\right)$$

Отсюда следует, что

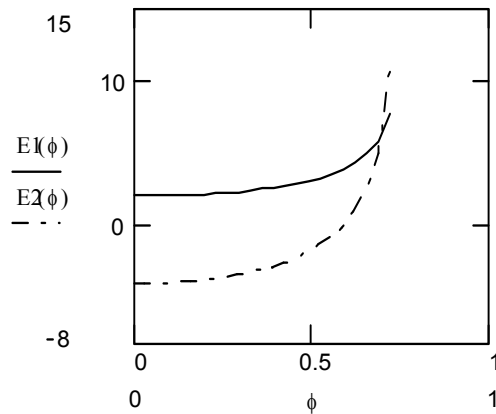
Используя формулы Френеля:

$$E1(\phi) := \frac{n_1 \cdot \cos(\phi) - n_2 \cdot \cos(\psi(\phi))}{n_1 \cdot \cos(\phi) + n_2 \cdot \cos(\psi(\phi))} \cdot E_{01}$$

$$E2(\phi) := \frac{n_2 \cdot \cos(\phi) - n_1 \cdot \cos(\psi(\phi))}{n_2 \cdot \cos(\phi) + n_1 \cdot \cos(\psi(\phi))} \cdot E_{02}$$

найдем амплитуды перпендикулярной (E1) и параллельной (E2) составляющих отраженной волны.

| $E1(\phi) =$ | $E2(\phi) =$ |
|--------------|--------------|
| 2 | -4 |
| 2.003 | -3.994 |
| 2.013 | -3.974 |
| 2.029 | -3.941 |
| 2.053 | -3.895 |
| 2.083 | -3.833 |
| 2.121 | -3.756 |
| 2.168 | -3.661 |
| 2.225 | -3.547 |

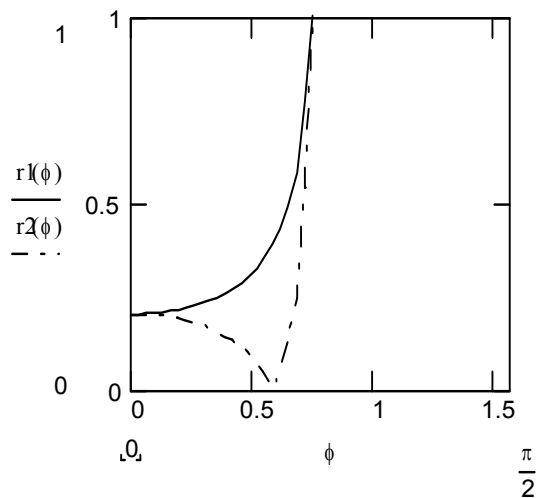


Найдем графики

зависимости $r_{\perp} \equiv E_{\perp}^{\perp} / E_0^{\perp}$ и $r_{\parallel} \equiv E_{\parallel}^{\parallel} / E_0^{\parallel}$ от угла падения для $n_1 > n_2$, построенные по формулам Френеля.

$$r1(\phi) := \frac{|E1(\phi)|}{E_{01}} \quad r2(\phi) := \frac{|E2(\phi)|}{E_{02}}$$

| $r1(\phi) =$ | $r2(\phi) =$ |
|--------------|--------------|
| 0.2 | 0.2 |
| 0.2 | 0.2 |
| 0.201 | 0.199 |
| 0.203 | 0.197 |
| 0.205 | 0.195 |
| 0.208 | 0.192 |
| 0.212 | 0.188 |
| 0.217 | 0.183 |
| 0.222 | 0.177 |
| 0.229 | 0.171 |
| 0.237 | 0.162 |
| 0.246 | 0.153 |
| 0.257 | 0.141 |
| 0.27 | 0.128 |
| 0.285 | 0.112 |
| 0.303 | 0.092 |



При данных показателях преломления угол падения ϕ не превышает предельного значения угла ϕ_m (угла полного отражения).

Задания:

1). С помощью формул Френеля показать, что при отражении от оптически менее плотной среды ($n_2 < n_1$) крутизна кривых $r_{\perp}(\phi)$ и $r_{\parallel}(\phi)$ при приближении ϕ к предельному углу полного отражения ϕ_m стремится к бесконечности.

2). Каким должен быть преломляющий угол α призмы из стекла с показателем преломления $n=1,5$, чтобы свет линейной поляризации мог пройти сквозь нее без потерь на отражение?

3). Неполяризованный почти монохроматический пучок света падает на плоскую границу раздела диэлектриков. Определить коэффициент отражения R и коэффициенты деполаризации $\rho_{1,2}$ отраженного и преломленного света, если угол падения равен углу Брюстера.

Лабораторная работа 5. Фурье-анализ сигнала.

Рассмотрим функцию $F(t)$, определенную для всех t и имеющую период T_1 :

$$F(t+T_1)=F(t).$$

Мы предполагаем, что функция $F(t)$ может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t \quad (5.1)$$

Где $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi/T_1$.

Процесс нахождения амплитуд, или коэффициентов Фурье B_0 , A_n и B_n (для всех n), для заданной периодической функции называется фурье-анализом.

$$B_0 = T_1^{-1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) dt \quad (5.2)$$

$$A_n = 2T_1^{-1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (5.3)$$

$$B_n = 2T_1^{-1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (5.4)$$

Где t_1 - любой подходящий момент времени, $n=1,2,3,\dots$

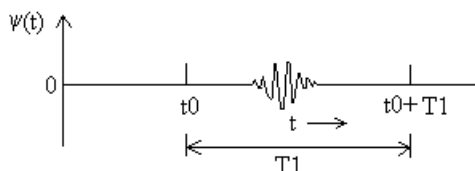


Рис. 5.1.

Рассмотрим непериодическую функцию. Предположим, что функция $\psi(t)$ имеет форму импульса ограниченной длительности (рис. 5.1): она равна

нулю до момента времени t_0 и после момента времени t_0+T_1 . Таким образом, мы предполагаем, что существует конечный интервал времени T_1 , внутри которого происходят колебания вида $\psi(t)$. Интервал T_1 , в общем, произволен, однако в дальнейшем мы будем считать его очень большим (но не бесконечно большим). (Величина $\nu_1=1/T_1$ будет нашей “единицей частоты”, которую мы сможем выбрать сколь угодно малой.)

Построим новую периодическую функцию, определенную для всех t и совпадающую с исходной функцией на временном интервале, равном периоду. Продолжив таким образом исходную функцию и сделав ее периодической, можно применить формулы для периодических функций. Образует периодическую функцию $F(t)$ с периодом T_1 ; на каждом периоде $F(t)$ является копией импульса $\psi(t)$ (рис. 5.2).

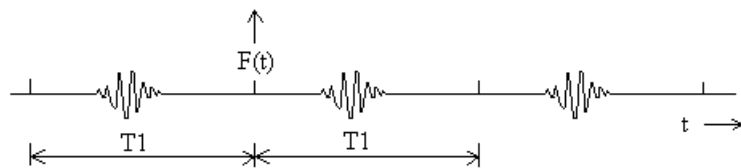


Рис. 5.2.

Разложение функции $F(t)$ в ряд Фурье определяется выражениями (5.1)-(5.4). Заметим, что коэффициент B_0 в разложении (5.1) равен нулю. Действительно, функция $\psi(t)$ равна нулю вне своего интервала T_1 , а в пределах этого интервала осциллирует. С физической точки зрения равенство $B_0=0$ означает, что в системе нет “постоянного смещения” или “постоянного напряжения”, то есть в общем случае у процесса, заданного функцией $\psi(t)$, нет постоянной составляющей. Постараемся применить формулы (5.1)-(5.4) к нашей задаче о представлении функции $\psi(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний.

Мы можем выбрать T_1 достаточно большим, и, следовательно, ω_1 сделать столь малой величиной, что можно будет перейти к непрерывной переменной ω . Разложение (5.1) будет иметь следующий вид:

$$F(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (5.5)$$

Где

$$A(\omega) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t dt$$

$$B(\omega) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t dt$$

Интеграл Фурье (5) можно записать и в комплексной форме:

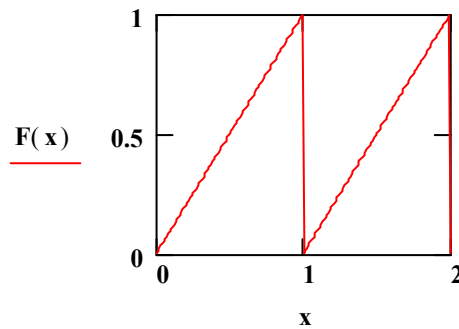
$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.6)$$

где

$$C(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$$

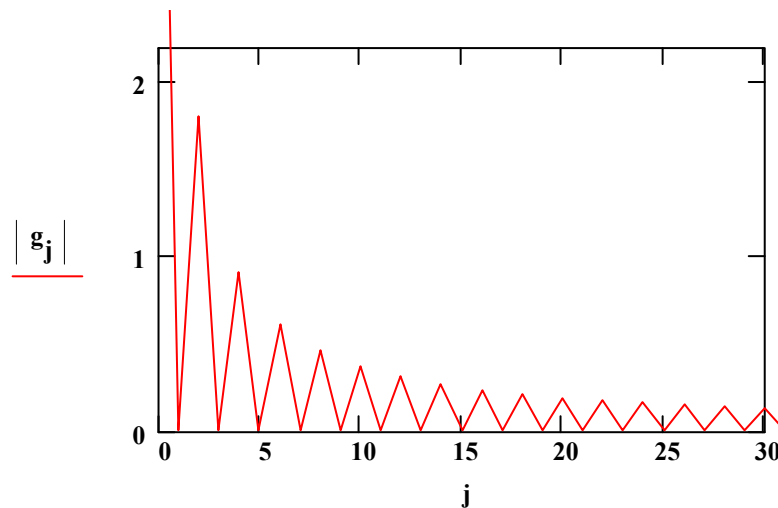
Рассмотрим в качестве примера разложение в ряд Фурье нескольких функций с помощью программы MathCAD.

Пример N 5.1. Зададим пилообразный сигнал следующим образом:
 $x := 0, 0.01 .. 2$, $F(x) := x - \text{floor}(x)$

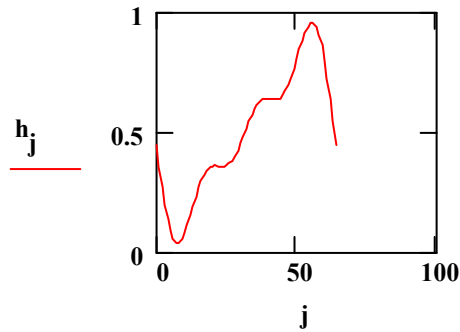


Заполним массив s $i := 0 .. 127$, $s_i := F\left(\frac{i}{64}\right)$

Используя функцию `fft`, выполним прямое преобразование Фурье
 $g := \text{fft}(s)$, $j := 0 .. 64$



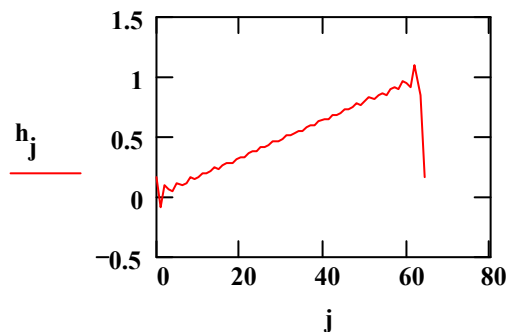
Используя функцию Хэвисайда-Ф, выполним обратное преобразование Фурье $\alpha := 0.5$ -амплитуда $G_j := g_j \cdot \Phi(|g_j| - \alpha)$ $h := \text{ifft}(G)$



Повторим преобразование Фурье для $\alpha := 0.1$

$h := \text{ifft}(G)$

$$G_j := g_j \cdot \Phi(|g_j| - \alpha)$$



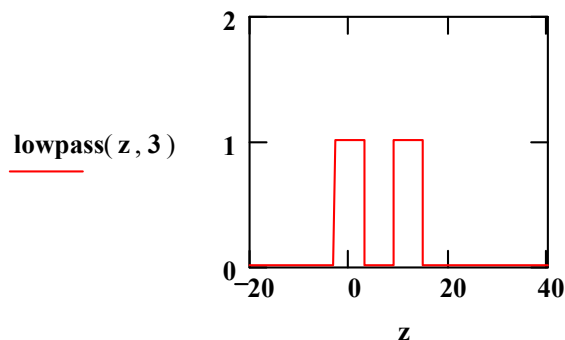
Пример N 5.2. Выполним преобразование Фурье для импульсной функции.

С помощью ступенчатой функции Хэвисайда $\Phi(x)$ можно создать импульс шириной ω :

$$\text{pulse}(x, \omega) := \Phi(x) - \Phi(x - \omega) + (\Phi(x - 2 \cdot \omega) - \Phi(x - 3 \cdot \omega))$$

$$\text{lowpass}(x, \omega) := \text{pulse}(x + \omega, 2 \cdot \omega)$$

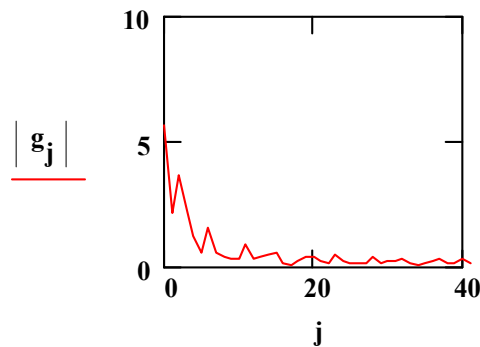
Функция `lowpass` является фильтром - умножение на нее какого-либо сигнала вырезает из этого сигнала кусок вокруг точки x , имеющий ширину 2ω
 $z := -20, -19.9.. 40$



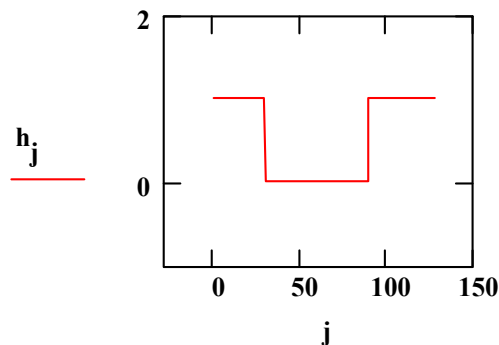
Выполним преобразование Фурье с помощью функции `fft`

$i := 0.. 255$

$$s_i := \text{lowpass}\left(\frac{i}{10}, 3\right) \quad g := \text{fft}(s) \quad j := 0.. 128$$

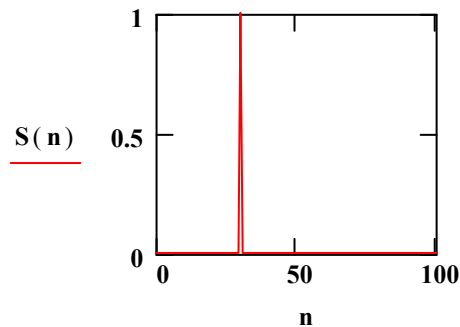


Выполним обратное преобразование Фурье с помощью функции `ifft` и функции Хэвисайда $\alpha := 0.01$ -амплитуда $G_j := g_j \cdot \Phi(|g_j| - \alpha)$ $h := \text{ifft}(G)$



Задания:

1) Выполнить прямое и обратное преобразование Фурье для δ -функции $m := 30$, $n := 0..100$ $S(n) := \delta(m, n)$



2) Задать три прямоугольных импульса и выполнить прямое и обратное преобразование Фурье.

Лабораторная работа 6. Сложение колебаний и волн.

Рассмотрим вопрос о наложении синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками $S1$ и $S2$ (рис.6.1), циклические частоты гармонических колебаний которых равны ω_1 и ω_2 , а

начальные фазы - соответственно α_1 и α_2 . Пусть вызываемые ими колебания в произвольной точке M одинаково направлены и удовлетворяют уравнению:

$$s_1 = (a_1 / r_1) \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1) = A_1 \sin \Phi_1$$

или в комплексной форме: $s_1 = A_1 e^{i\Phi_1}$

$$s_2 = (a_2 / r_2) \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2) = A_2 \sin \Phi_2$$

$$(s_2 = A_2 e^{i\Phi_2})$$

По принципу суперпозиции, результирующее колебание в точке M определяется

$$(s = A e^{i\Phi})$$

Для нахождения A и Φ воспользуемся методом временных диаграмм (рис. 6.2).

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (6.1)$$

Возможны два случая $s = s_1 + s_2 = A \sin \Phi$

$$\operatorname{tg} \Phi = (A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2) / (A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2) \quad (6.2)$$

- а) разность фаз волн $\Phi_2 - \Phi_1$ в точке M изменяется с течением времени; такие волны и возбуждающие их источники $S1$ и $S2$ называются некогерентными;
 б) разность фаз волн $\Phi_2 - \Phi_1$ не зависит от времени; такие волны и возбуждающие их источники называются когерентными.

Используя соотношение $k = \omega / v$, где v - фазовая скорость волны, получим

$$\Phi_1 = \omega_1 t - \omega_1 (r_1 / v_1) + \alpha_1$$

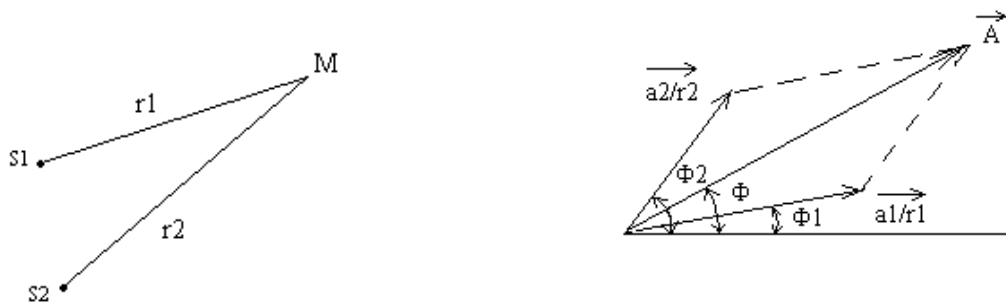


Рис.6.1.

$$\Phi_2 = \omega_2 t - \omega_2 (r_2 / v_2) + \alpha_2$$

Рис.6.2.

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (\omega_2 (r_2 / v_2) - \omega_1 (r_1 / v_1)) + (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (6.3)$$

Второй и третий члены правой части равенства не зависят от времени. Поэтому две синусоидальные волны когерентны, если их частоты одинаковы, и некогерентны, если их частоты различны.

Из формулы (6.1) следует, что при наложении некогерентных синусоидальных волн амплитуда результирующих колебаний в точке M среды зависит от времени, то есть результирующие колебания негармонические. Амплитуда A изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$, причем циклическая частота колебаний амплитуды A совпадает с циклической частотой изменения $\Phi_2 - \Phi_1$, то есть равна $|\omega_2 - \omega_1|$. Если эта частота достаточно велика, то любой регистрирующий прибор не будет успевать реагировать на изменения величины A , то есть будет показывать лишь некоторое ее среднее значение.

Найдем среднее значение $\langle A^2 \rangle$ квадрата амплитуды за время, равное периоду τ ее изменения:

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle &= (1/\tau) \int_0^\tau A^2 dt = (1/\tau) \int_0^\tau [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)] dt \\ \langle A^2 \rangle &= A_1^2 + A_2^2 + (2A_1A_2/\tau) \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt \end{aligned} \quad (6.4)$$

Так как за время τ разность $\Phi_2 - \Phi_1$ изменяется на 2π , то

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt &= 0 \\ \int_0^\tau e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} dt &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2$$

Таким образом, при наложении некогерентных волн среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны равно сумме квадратов амплитуд исходных волн. В согласии с законом сохранения энергии при наложении некогерентных волн происходит суммирование их энергий.

Иначе обстоит дело при наложении когерентных волн. Полагая в формуле (6.3) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и учитывая, что при этом в однородной и изотропной среде $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, получаем

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\omega/\nu(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = -k(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Поэтому формулу (6.1) можно переписать в таком виде:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)] \quad (6.1')$$

Так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const}$ и $k = \text{const}$, то амплитуда A не зависит от времени. Косинус в правой части формулы (6.1') равен единице и амплитуда результирующего колебания максимальна ($A = A_1 + A_2$) во всех точках M , для которых аргумент косинуса равен четному числу π :

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm 2m\pi \quad (6.5)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, или, заменив k на $2\pi/\lambda$, получим

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda + ((\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi)\lambda \quad (6.5')$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то это условие принимает вид:

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

Очевидно, что амплитуда результирующего колебания минимальна ($A = |A_1 - A_2|$) во всех точках M , для которых

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm(2m - 1)\pi$$

или

$$r_2 - r_1 = \pm(2m - 1)\lambda/2 + ((\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi)\lambda \quad (6.6')$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то условие минимума амплитуды имеет такой вид:

$$r_2 - r_1 = \pm(2m - 1)\lambda/2 \quad (6.6'')$$

Величина $r_2 - r_1$ называется геометрической разностью хода волн от их источников $S1$ и $S2$ до рассматриваемой точки.

При наложении когерентных волн квадрат амплитуды и энергия результирующей волны, вообще говоря, отличны от суммы, соответственно, квадратов амплитуд и энергий исходных волн. В самом деле, в точках M , удовлетворяющих условию (6.5'),

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2$$

больше

$$(A_1^2 + A_2^2),$$

а в точках M , удовлетворяющих условию (6.6'),

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2$$

меньше

$$(A_1^2 + A_2^2).$$

Интерференцией волн называют явление, осуществляющееся при наложении двух или нескольких волн и состоящее в устойчивом во времени их взаимном усилении в одних точках пространства и ослаблении - в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Из предыдущего ясно,

что интерферировать могут только когерентные волны, если им соответствуют колебания, совершающиеся вдоль одного и того же или близких направлений.

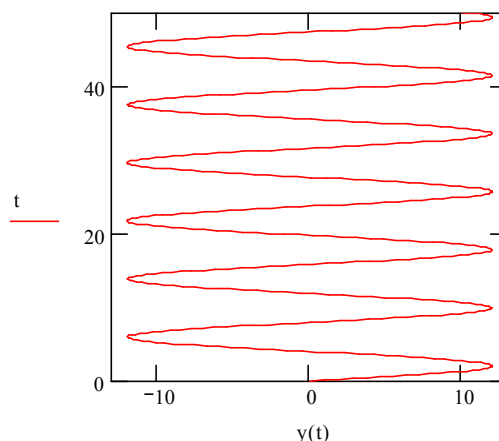
При интерференции волн отсутствует простое суммирование их энергий. Иными словами, интерференция волны приводит к перераспределению энергии колебаний между соседними областями среды. Однако, в среднем, для достаточно большой области пространства энергия результирующей волны равна сумме энергий интерферирующих волн. Поэтому явление интерференции ни в какой мере не противоречит закону сохранения и превращения энергии.

Пример N 6.1. Рассмотрим с помощью программы MathCAD сложение двух электромагнитных волн.

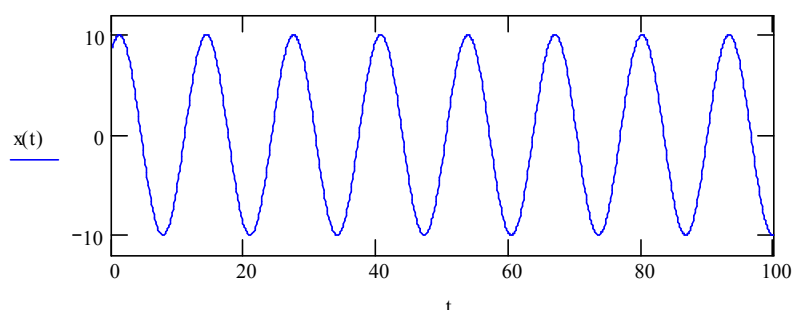
а) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются перпендикулярно друг другу,

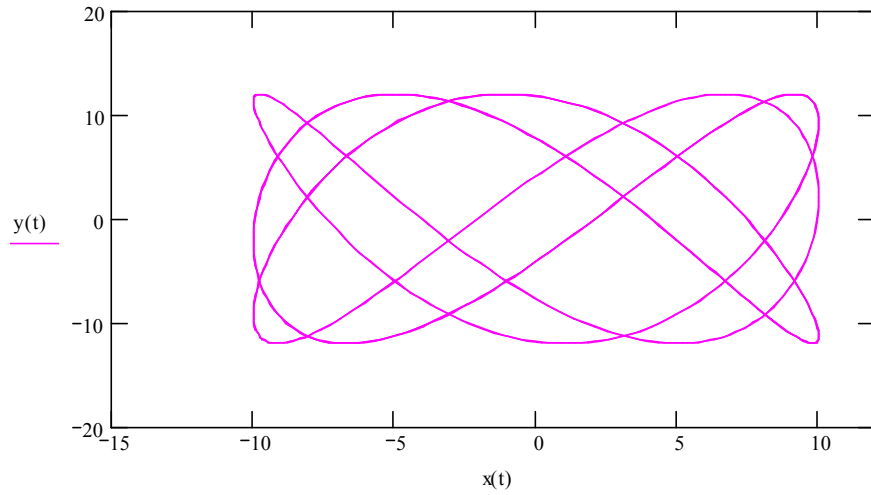
$$t := 0, 0.1 .. 100 \quad \omega_2 := 5 \cdot 314 \quad \phi_2 := \frac{\pi}{2} \quad B := 12$$

$$y(t) := B \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \phi_2)$$



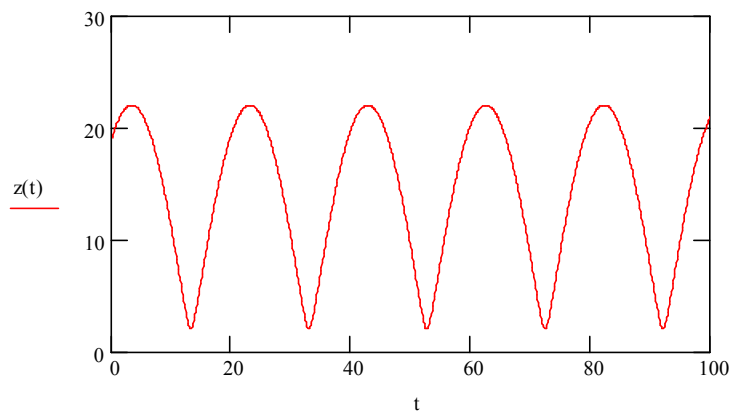
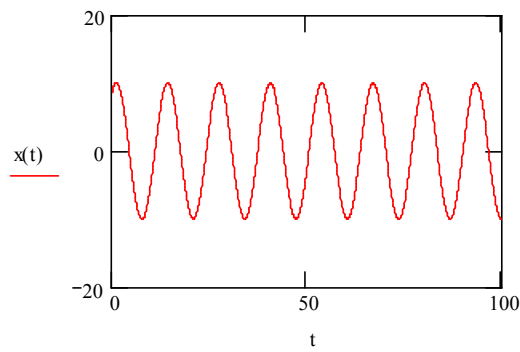
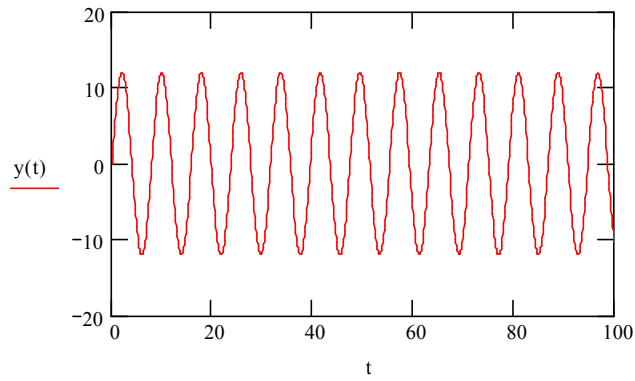
$$\omega_1 := 314 \cdot 3 \quad \phi_1 := \frac{\pi}{6} \quad A := 10 \quad x(t) := A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \phi_1)$$





б) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются параллельно друг другу

$$\phi := \phi_2 - \phi_1 \quad \omega := \omega_2 - \omega_1 \quad z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)}$$



Частным случаем интерференции волн являются так называемые стоячие волны. Стоячие волны возникают при наложении двух распространяющихся навстречу бегущих монохроматических волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации. Такая картина получается, в частности, при полном отражении волны от границы. Падающая на границу волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль одной оси в противоположных направлениях.

$$\zeta_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$$

$$\zeta_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2)$$

Сложив вместе эти уравнения, получим:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Полученное уравнение - это уравнение стоячей волны.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля стоячей волны, созданной наложением встречных линейно поляризованных плоских волн. Выберем ось Z в направлении распространения одной из волн, а ось X - в направлении поляризации. Начало отсчета расстояний на оси Z выберем в точке, где колебания напряженности электрического поля обеих волн происходят в одинаковой фазе, а начало отсчета времени - в тот момент, когда эти напряженности в начале координат достигают максимума. Результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = \{2E_0 e^{-i\omega t} \cos kz; 0; 0\}$$

$$\vec{B} = \{0; 2B_0 e^{i\omega t} \sin kz; 0\}$$

Из этих формул видно, что вектор напряженности электрического поля результирующей волны в каждой точке совершает гармоническое колебание в направлении оси X с частотой ω , причем амплитуда колебаний изменяется от максимального значения $2E_0$ в плоскостях $z = (\pi/k)n = (\lambda/2)n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), называемых пучностями электрического поля, до нуля в плоскостях $z = (\pi/k)(n+1/2) = (\lambda/2)(n+1/2)$, называемых узлами. Фаза колебаний \vec{E} во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны узла происходят в противофазе.

В отличие от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии - полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседним узлом и пучностью, не зависит от времени. Она лишь периодически переходит из кинетической энергии, локализованной в основном вблизи пучности, в потенциальную энергию упруго деформированной среды, локализованную в основном вблизи узла, а затем обратно из потенциальной в кинетическую.

Пример N 6.1. В вакууме в направлении оси Z установилась стоячая электромагнитная волна. Рассмотреть распространение электромагнитной волны а) в положительном направлении оси Z , б) в отрицательном направлении оси Z . Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны в моменты $t=0$ и $t=T/4$, где T - период колебаний.

Решение: Учтем, что векторы \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} в каждой из волн, образующих стоячую волну, образуют правую тройку векторов.

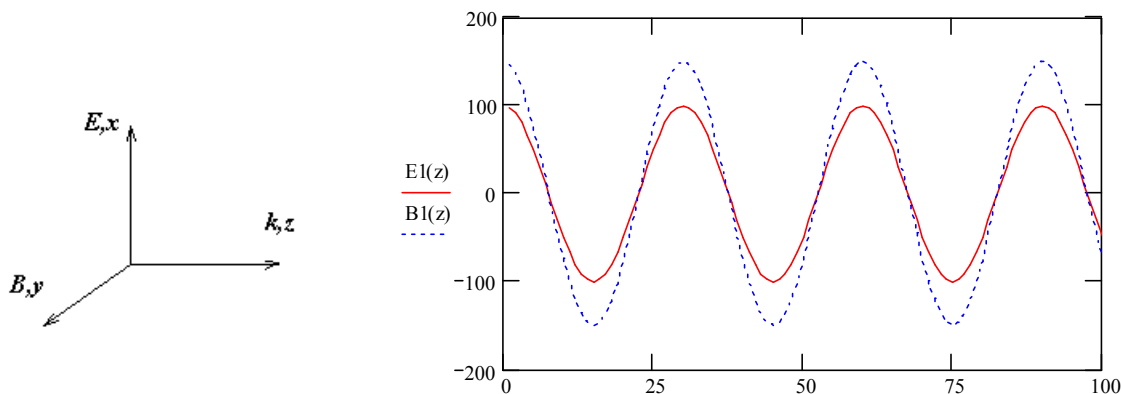
а) Волна распространяется в положительном направлении оси Z

$$B = B_m \cos(kz) \cos(\omega t), \quad E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$$

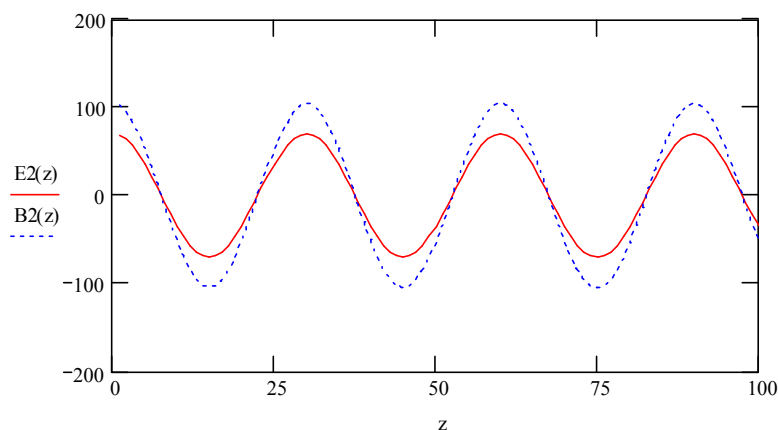
$$T := 10 \quad \omega := 60 \quad \lambda := 30 \quad \kappa := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

$$E_m := 100 \quad B_m := 150 \quad t_1 := 0 \quad t_2 := \frac{T}{4}$$

$$E1(z) := E_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) \quad B1(z) := B_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$



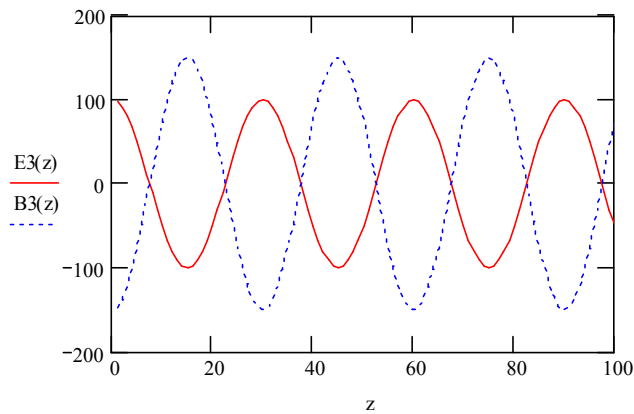
$$E2(z) := E_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) \quad B2(z) := B_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$



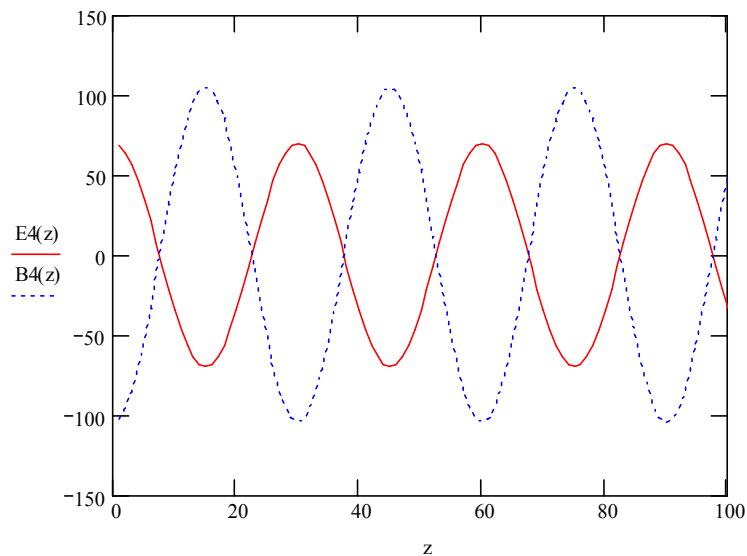
б) Волна распространяется в отрицательном направлении оси Z

$$E = E_m \cos(-kz) \cos(\omega t) \quad B = -B_m \cos(-kz) \cos(\omega t)$$

$$z := 1 \dots 100 \quad E3(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) \quad B3(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$



$$E4(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) \quad B4(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$



Задания:

- 1). В направлении оси OZ установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$. Найти магнитную составляющую волны $B(z, t)$. Изобразить картину распределения магнитной составляющей волны в разные моменты времени.
- 2). В вакууме вдоль оси OZ установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$. Найти Z-проекцию вектора Пойнтинга $S_z(z, t)$ и ее среднее за период значение.

Лабораторная работа 7. Скин-эффект.

Если в однородном проводнике с постоянным поперечным сечением имеется постоянный ток, то плотность тока одинакова в разных точках сечения проводника. Иное наблюдается при переменном токе. В этом случае плотность тока оказывается неодинаковой по сечению; она наибольшая на поверхности и наименьшая на оси проводника. Ее неравномерность тем больше, чем толще

проводник и чем больше частота переменного тока, а при очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое. Это явление получило название скин-эффект.

Указанное любопытное явление объясняется возникновением вихревого электрического поля электромагнитной индукции. Рассмотрим проводник с переменным током, и пусть в данный момент времени ток I имеет направление, указанное на рисунке 7.1. Этот ток создает внутри проводника магнитное поле, линии индукции которого лежат в плоскости перпендикулярной к оси проводника. Предположим, что ток I усиливается. Тогда возрастающая индукция \vec{B} вызовет появление вихревого электрического поля \vec{E} (рис. 7.1а), которое у поверхности проводника направлено также, как и ток I , а на оси проводника – противоположно току I . Это поле, следовательно, будет усиливать ток на поверхности и ослаблять его на оси.

Допустим теперь, что ток I уменьшается. В этом случае ослабевающая индукция \vec{B} вызовет электрическое поле \vec{E} , которое будет направлено противоположно по сравнению с первым случаем (рис. 7.1б), то есть будет у поверхности противоположно току, а на оси – совпадать с током. В обоих случаях, и при усилении, и при ослаблении тока, вихревое электрическое поле на оси проводника препятствует, а на поверхности способствует изменениям тока, а значит, на оси проводника переменный ток слабее, а на поверхности сильнее.

Закон распределения плотности тока по сечению проводника особенно прост, если проводник имеет форму плоского слоя, толщина $2D$ которого значительно меньше ширины (пластина). Расчет показывает, что это распределение зависит от величины

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \mu_0 \gamma}}, \quad (7.1)$$

которая получила название глубины проникновения тока или толщины скин-эффекта. Здесь μ - магнитная проницаемость вещества проводника, μ_0 - магнитная постоянная, γ - удельная электропроводность, $\omega=2\pi\nu$ - круговая частота переменного тока.

Если $d \gg D$, то плотность тока практически постоянна по сечению проводника. Если $d \ll D$ (сильный скин-эффект), то закон распределения приблизительно имеет вид,

$$j(y) = j_{нов} e^{-y/d}, \quad (7.2)$$

где $j(y)$ - плотность тока на расстоянии y от поверхности проводника, $j_{нов}$ - плотность тока у поверхности. Из формулы видно, что глубина проникновения d есть такое расстояние, на котором плотность тока уменьшается в $e=2.71$ раз.

Вследствие скин-эффекта электрический ток при больших частотах течет преимущественно сквозь поверхностный слой проводника. Это приводит к уменьшению действующего сечения проводника и, как следствие, к увеличению сопротивления проводника. При больших частотах или толстых проводах это увеличение сопротивления может быть значительным. Благодаря неравномерному распределению тока в проводнике изменяется не только сопротивление, но и индуктивность. Действительно, при постоянном токе магнитное поле возникает как во внешнем пространстве, так и внутри проводника. При наличии сильного скин-эффекта ток существует практически только в поверхностном слое, магнитного поля внутри проводника нет. Магнитная энергия становится меньше на величину энергии поля внутри проводника, следовательно, индуктивность проводника уменьшается.

Существование скин-эффекта всегда учитывают в технике быстропеременных токов. Так как такие токи практически не идут в глубине проводника, то линии для них собирают из полых труб. В современной радиотехнике сверхвысоких частот (СВЧ) многие детали (волноводы, коаксиальные линии) покрывают тонким, хорошо проводящим слоем серебра, так как их сопротивление практически обусловлено только поверхностным слоем.

Исходя из уравнений Максвелла, получим уравнение, описывающее скин-эффект.

$$\text{Rot}\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{j} \quad (7.3)$$

$$\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.4)$$

Подставляя в уравнение (7.3) выражение для j по закону Ома

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (7.5)$$

И, дифференцируя обе части полученного уравнения по времени, находим

$$\text{Rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7.6)$$

Или с учетом (7.4)

$$-\text{RotRot}\vec{E} = \mu \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7.7)$$

Поскольку

$$\text{RotRot}(\vec{E}) = \text{graddiv}(\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \quad (7.8)$$

и $\text{div}(\vec{E})=0$, окончательно имеем

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7.9)$$

Для упрощения решения этого уравнения предположим, что ток течет по однородном бесконечному проводнику занимающему полупространство $y > 0$ вдоль оси X (рис. 7.2). Поверхностью проводника является плоскость $Y=0$. Таким образом.

$$j_x = j_x(y, t), j_y = j_z = 0, \quad (7.10)$$

$$E_x = E_x(y, t), E_y = E_z = 0, \quad (7.11)$$

Тогда, исходя из (7.9)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \gamma \mu \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (7.12)$$

Поскольку все величины в (7.10) гармонически зависят от t , можно положить

$$E_x(y, t) = E_0(y) e^{i\omega t}, \quad (7.13)$$

После подстановки (7.13) в (7.12) и сокращения обеих частей уравнения на $e^{i\omega t}$, получаем уравнение для $E_0(y)$:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} = i\omega \gamma \mu E_0, \quad (7.14)$$

Общее решение уравнения (7.14) таково:

$$E_0 = C_1 e^{-ky} + C_2 e^{ky}, \quad (7.15)$$

Учитывая, что

$$k = \sqrt{i\omega \mu \gamma} = \alpha(1+i), \alpha = \sqrt{\omega \mu \gamma / 2}, \quad (7.16)$$

находим

$$E_0(y) = C_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}, \quad (7.17)$$

При удалении от поверхности проводника второе слагаемое в (7.15) неограниченно возрастает, что является физически недопустимой ситуацией. Следовательно, в (7.15) $C_2=0$ и в качестве физически приемлемого решения остается только первое слагаемое. Тогда решение задачи с учетом уравнения (7.13) имеет вид

$$E_x(x, t) = C_1 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}, \quad (7.18)$$

Взяв действительную часть этого выражения, и перейдя с помощью соотношения $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ к плотности тока, получим

$$j_x(y, t) = \gamma C_1 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y), \quad (7.19)$$

Принимая во внимание, что $j_x(0, 0) = j_{ноб}$ – амплитуда плотности тока на поверхности проводника, приходим к следующему распределению объемной плотности тока в проводнике:

$$j_x(y, t) = j_{ноб} e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y), \quad (7.20)$$

Аномальный скин-эффект.

Изложенный механизм возникновения скин-эффекта предполагает, что при своем движении электрон непрерывно теряет энергию на преодоление омического сопротивления проводника, в результате чего происходит выделение Джоулевой теплоты. Ясно, что такая идеализация возможна лишь в том случае, когда движение электронов происходит в областях, линейные размеры которых много больше средней длины свободного пробега электрона между столкновениями с атомами вещества. Поэтому изложенная выше теория справедлива лишь при условии, что толщина скин-слоя много больше средней длины свободного движения электронов.

Такое соотношение между ними соблюдается в весьма широких пределах. Например, даже при частоте 10 ГГц и температуре 300 К толщина скин-слоя в меди составляет около 0.01 мкм. Однако при очень низкой температуре ситуация резко меняется, а, следовательно, увеличивается длина свободного пробега и уменьшается толщина скин-слоя. Например, при температуре жидкого гелия (4,2 К) проводимость чистой меди увеличивается приблизительно в 10^4 раз. Это приводит к увеличению средней длины свободного пробега электронов в 10^4 раз и уменьшению толщины скин-слоя в $(10^4)^{1/2} = 10^2$ раз. Таким образом, длина свободного пробега и толщина скин-слоя становятся, соответственно, равными 100 и 0.01 мкм. При этих условиях механизм, приводящий к образованию скин-эффекта, уже не действует. Эффективная толщина слоя, в которой сосредоточен ток, изменяется. Такое явление называется аномальным скин-эффектом.

В условиях аномального скин-эффекта в пределах нормального скин-слоя в течение всего свободного пробега могут двигаться только те электроны, скорости которых почти параллельны поверхности проводника. Все другие электроны в процессе свободного движения успевают покинуть “нормальный” скин-слой и значительно изменить направление движения. Из-за этого уменьшается проводимость материала и изменяется эффективная “аномальная” толщина d^1 скин-слоя. Для того чтобы ее приближенно оценить, можно принять, что доля электронов проводимости имеет порядок d^1/l от того числа в рамках «нормального» скин-эффекта (l – средняя длина свободного пробега электронов). Уменьшение этой доли приводит к уменьшению проводимости, учитываемой приближенно заменой в формулах $\gamma \rightarrow \beta\gamma(d^1/l)$, где β – числовые

замены в формуле (7.1)

$$d^1 = \sqrt{\frac{2l}{\beta\gamma\mu\omega}}, \quad (7.21)$$

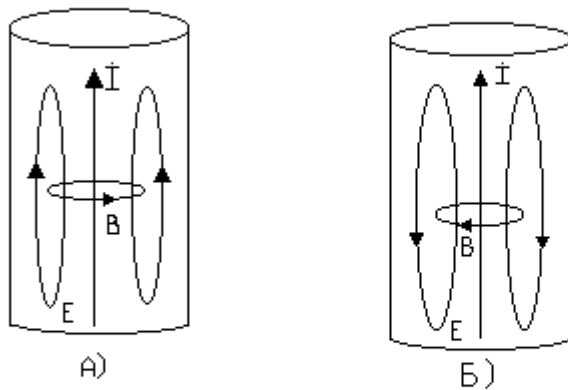


Рис. 7.1

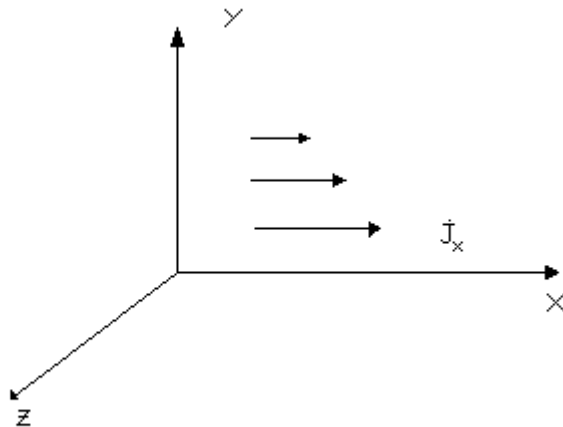


Рис. 7.2.

Изучим распределение переменного электрического тока в цилиндрическом проводе радиуса a . Будем считать, что плотность тока и электрическое поле имеют лишь составляющие вдоль оси провода (ось Z) и не зависят от координаты r . Кроме того, будем в соответствии с симметрией задачи считать, что распределение тока и поля обладает симметрией вращения. Волновое уравнение, которому должна подчиняться соответствующая составляющая E_z внутри провода

$$\Delta E_z + K^2 E_z = 0, \quad (7.22)$$

из-за отсутствия зависимости от φ и Z сводится к уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} + K^2 E_z = 0, \quad (7.23)$$

Предполагая, что материал провода является хорошим проводником, не имеющим магнитных потерь, можем брать комплексное волновое число в проводнике в виде

$$K = (1 + i)/d, \quad (7.24)$$

где d — толщина скин-слоя.

В качестве решения уравнения (7.23) нужно взять функцию Бесселя $J_0(Kr)$, то есть положить

$$E_z = C J_0(Kr). \quad (7.25)$$

Формула (7.25) уже дает картину распределения переменного тока в проводе. В самом деле, распределение тока (и поля) по поперечному сечению провода характеризуется функцией,

$$f(r) = E_z(r)/E_z(a) = j_z(r)/j_z(a), \quad (7.26)$$

обращающейся в единицу на поверхности провода, при $r=a$. Согласно формуле (7.25)

$$f(r) = J_0(Kr)/J_0(Ka) \quad (7.27)$$

и характер распределения тока по поперечному сечению провода определяется произведением Ka , то есть согласно формуле (7.24) отношением радиуса провода a к толщине скин-слоя d . Для данного проводника толщина скин-слоя d зависит от длины волны. Для постоянного тока ($\omega = 0, \lambda = \infty$) имеем $d = \infty$, вследствие чего аргументы функций $J_0(Kr)$ и $J_0(Ka)$ равны нулю и $f(r) \equiv 1$. При увеличении частоты толщина скин-слоя d уменьшается и при небольших отношениях a/d абсолютная величина функции $f(r)$ мало отличается от единицы, центральная часть проводника несет несколько меньшую плотность тока, чем его периферийная часть. При увеличении отношения a/d распределение тока становится все более неравномерным, и при больших значениях a/d абсолютная величина функции $f(r)$ быстро спадает при удалении от поверхности провода. Если скин-эффект сильный, то функции Бесселя $J_0(Ka)$ и $J_0(Kr)$ (при $r \approx a$) можно вычислить по формуле, пригодной и для комплексных x , при $\text{Im}x \gg 1$

$$J_0(x) = e^{-i(x-\pi/4)}/\sqrt{2\pi x}, \quad (7.28)$$

так как

$$\cos(x - \pi/4) = [e^{i(x-\pi/4)} + e^{-i(x-\pi/4)}]/2 \approx e^{-i(x-\pi/4)}/2. \quad (7.29)$$

Подставляя выражение (7.28) в формулу (7.27), получаем

$$f(r) = \sqrt{a/r} e^{iK(a-r)} \approx e^{iK(a-r)}, \quad (7.30)$$

поскольку функция $f(r)$ отлична от нуля практически лишь при $r \approx a$. Отсюда

$$|f(r)| = e^{-(a-r)/d}, \quad (7.31)$$

при $d \ll a$ ток сосредоточивается в тонком слое у поверхности провода.

Пользуясь формулой (7.25), нетрудно вычислить погонный импеданс провода Z_i . Для этого нужно вычислить полный ток J , соответствующий распределению поля в проводе по формуле (7.25). Так как плотность тока J_z связана с E_z соотношением

$$j_z = \sigma E_z, \quad (7.32)$$

то полный ток может быть найден в виде интеграла

$$J = \int j_z dS = 2\pi\sigma \int_0^a E_z r dr. \quad (7.33)$$

Пользуясь уравнением (7.23), можно написать

$$E_z = -\frac{1}{K^2} \left(\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d E_z}{dr} \right), \quad (7.34)$$

$$r E_z = -\frac{1}{K^2} \left(r \frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{d E_z}{dr} \right) = -\frac{1}{K^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d E_z}{dr} \right)$$

и, подставляя последнее выражение в формулу (7.33), получаем

$$J = -\frac{2\pi\sigma}{K^2} \int_0^a \frac{d}{dr} \left(r \frac{d E_z}{dr} \right) dr = -\frac{2\pi\sigma a}{K} C J_0'(Ka). \quad (7.35)$$

С помощью первого соотношения (7.34) можно также написать:

$$J = (2\pi\sigma a/K) C J_1(Ka). \quad (7.36)$$

Погонный импеданс Z_i , получается в виде

$$Z_i = \frac{E_z(a)}{J} = \frac{K}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(Ka)}{J_1(Ka)}. \quad (7.37)$$

Вводя погонное сопротивление провода на постоянном токе

$$R_0 = 1/\pi\sigma a^2, \quad (7.38)$$

можно придать формуле (7.37) следующий вид:

:

$$Z_i/R_0 = xJ_0(x)/2J_1(x), \quad x = Ka = (1+i)a/d. \quad (7.39)$$

Если скин-эффект выражен слабо, то есть, если $a/d \ll 1$, то вследствие малости аргумента x формула (7.39) принимает вид:

$$Z_i/R_0 = 1 - x^2/8 = 1 - k^2 a^2 \varepsilon / 8, \quad (7.40)$$

откуда, полагая, $Z_i = R - i\omega L_i$, получаем

$$R = R_0, \quad L_i = 1/2c^2, \quad (7.41)$$

при вещественном $\mu \neq 1$ погонную внутреннюю индуктивность L_i нужно умножить на μ .

Таким образом, при достаточно низких частотах, когда скин-эффект выражен слабо, активное сопротивление провода практически равно его сопротивлению на постоянном токе. Его внутреннюю индуктивность, как легко показать, можно вычислить из элементарных соображений, принимая равномерное распределение постоянного тока внутри провода и вычисляя вызванное им внутри провода магнитное поле.

В случае сильного скин-эффекта, когда отношение a/d велико, для функции $J_0(x)$ может быть применено приближенное выражение (7.28), а для функции $J_1(x)$ — аналогичное выражение

$$J_1(x) = e^{-i(x-3\pi/4)} / \sqrt{2\pi x}, \quad (7.42)$$

откуда

$$\frac{Z_i}{R_0} = -i \frac{x}{2}, \quad Z_i = \frac{1-i}{2\pi a \sigma d}. \quad (7.43)$$

Таким образом, при сильном скин-эффекте получается выражение (7.43) для погонного импеданса. В случае сильного скин-эффекта распределение тока и поля по формуле (7.30) получилось таким же, как для плоской волны, распространяющейся внутрь провода в радиальном направлении.

$$Z_i = R - i\omega L_i = \frac{\xi}{2\pi a} = \frac{1-i}{2\pi a \sigma d} \quad (7.44)$$

При конечных значениях a/d погонный импеданс приходится вычислять с помощью формулы (7.39), пользуясь таблицами функций Бесселя от комплексного аргумента. Видно, что активное и реактивное сопротивления единицы длины провода при увеличении отношения a/d , т. е. при росте частоты, неограниченно возрастают, в то время как внутренняя индуктивность падает. Действительно, из формулы (7.43) следует, что

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\omega L_i}{R_0} = \frac{a}{2d}, \quad \frac{L_i}{L_i^0} = \frac{2d}{a} \quad \text{при} \quad \frac{a}{d} \rightarrow \infty \quad (7.45)$$

Уменьшение L_i с ростом частоты физически объясняется тем, что при уменьшении d ток и поле вытесняются из внутренней области провода, из-за чего находящаяся внутри провода магнитная энергия стремится к нулю. При этом нетрудно показать, что введенные R и L_i удовлетворяют соотношениям $\frac{1}{2}R|J|^2 = \bar{P}_\varepsilon$, $\frac{1}{4}L_i|J|^2 = \bar{W}_\mu$, где \bar{P}_ε — средняя мощность электрических потерь, \bar{W}_μ . Существенно, что как при переменном, так и при постоянном токе мощность поступает в данный участок цепи (отрезок проводника) не через поперечные сечения, где $\sigma=0$, а через его боковую поверхность, где $\sigma<0$, то есть из внешнего пространства. Во внешнее пространство мощность подается теми участками цепи, где приложены сторонние электродвижущие силы. Поэтому скин-эффект в цепи переменного тока и скин-эффект при падении волны на проводящее тело можно рассматривать с единой точки зрения.

Отметим, что выражение для Z_i было выведено в предположении, что переменный ток равномерно распределен по длине провода. Если же, например, вдоль провода бежит волна с волновым числом h , так что зависимость поля и тока от z определяется множителем e^{ihz} , то в каждом поперечном сечении $z=\text{const}$ составляющая E_z будет удовлетворять не уравнению (7.23), а уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} + g^2 E_z = 0, \quad g = \sqrt{K^2 - h^2}, \quad (7.46)$$

В связи с этим в выражениях (7.27) и (7.37) нужно заменить K на g . Однако при выполнении условия $|K| \gg |h|$ величины K и g практически совпадают. В большинстве случаев это неравенство удовлетворяется благодаря условию $n = n' + n''$ при $n'' \gg 1$, где n' и n'' — показатели преломления двух различных сред, так как $|h| \sim k$. Поэтому для волн, распространяющихся вдоль длинных линий, можно пользоваться погонным внутренним импедансом Z_i , вычисленным выше.

Задания:

- 1). Бесконечный металлический цилиндр радиуса a с проводимостью δ и магнитной проницаемостью μ находится в постоянном и однородном, продольном относительно его оси, магнитном поле H_0 . В некоторый момент времени внешнее поле выключается и поддерживается затем равным нулю. Найти ход затухания со временем магнитного в цилиндре.
- 2). Внутри металлической трубы на расстоянии l от ее осевой линии течет прямолинейный ток J . Радиус трубы a , толщина стенки $h \ll a$, проводимость стенки δ ($\mu=1$). Как ток J , так и расстояние l зависят от времени по произвольному закону, но так, что во все моменты времени $l \ll a$. Считая выполненными условия квазистационарности, определить силу f на единицу

длины действующую на ток J со стороны вихревых токов, индуцируемых в цилиндрической оболочке при слабом скин-эффекте ($h \ll \delta$).

3). Решить предыдущее задание для случая сильного скин-эффекта.

Лабораторная работа 8. Электростатическое поле от различного распределения зарядов.

Поле точечного заряда.

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд. С помощью крутильных весов Кулон измерил силу взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и расстояния между ними и пришел к выводу, что сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна расстоянию между ними. Полученный закон называют законом Кулона:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (8.1)$$

Здесь \vec{F}_{21} - сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , k - коэффициент пропорциональности, q_1 и q_2 - величины взаимодействующих зарядов, r - расстояние между ними, \vec{e}_{12} - единичный вектор, имеющий направление от заряда q_1 к заряду q_2 .

Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства - создает в нем электрическое поле. Из закона Кулона следует, что отношение силы, действующей на пробный заряд $q_{пр}$, к величине этого заряда, постоянно в данной точке. Эту векторную величину называют напряженностью электрического поля и для поля точечного заряда q она равна:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (8.2)$$

Направлен вектор \vec{E} вдоль радиальной прямой, проходящей через заряд q и данную точку поля, от заряда, если он положителен и к заряду, если он отрицателен.

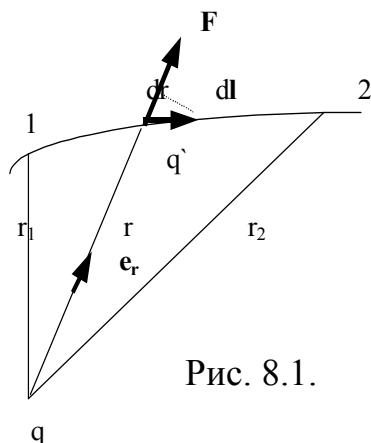


Рис. 8.1.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q . В любой точке этого поля на точечный заряд q' действует сила $\vec{F} = k \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r = F(r) \vec{e}_r$

где $F(r)$ - модуль силы \vec{F} , \vec{e}_r - орт радиус-вектора \vec{r} , определяющий положение заряда q' относительно q .

Данная сила является центральной, а центральное поле сил консервативно. Следовательно, работа, которая совершается силами поля над зарядом q' при перемещении

его из одной точки пространства в другую, не зависит от траектории. Эта работа равна:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{l} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right)$$

Работа сил консервативного поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии: $A_{12} = W_{p1} - W_{p2}$, и сопоставление этих формул приводит к следующему выражению для потенциальной энергии двух точечных зарядов:

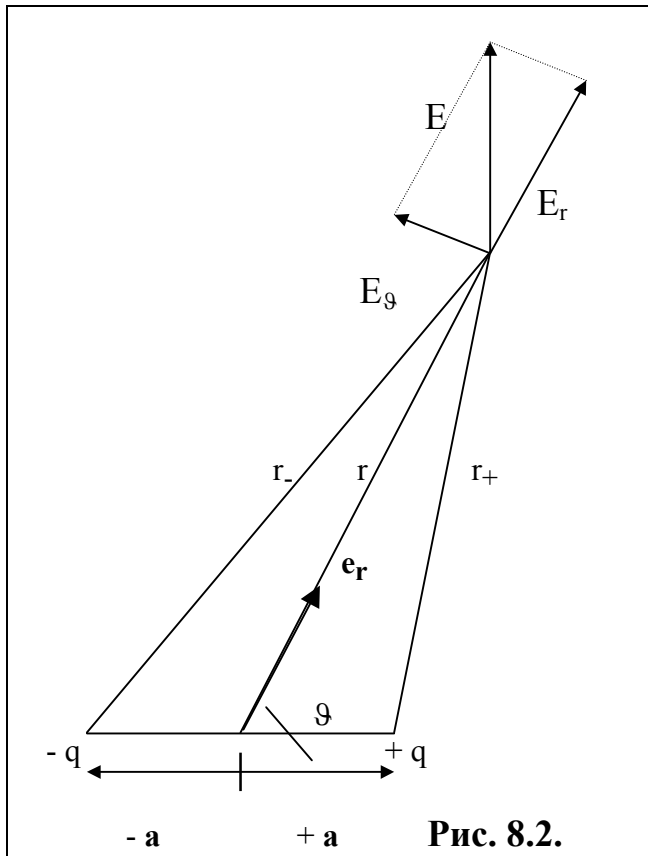
$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + const$$

Значение константы в выражении обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении на бесконечность потенциальная энергия обращалась в нуль. Потенциалом назовем постоянное в данной точке поля отношение: $\frac{W}{q_{np}}$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (8.3)$$

Поле диполя.

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми l значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда называется осью диполя (рисунок 8.2).



$$l = 2a$$

Ввиду малости a по сравнению с r можно приближенно положить, что

$$r_+ = r - a \cos \vartheta$$

$$r_- = r + a \cos \vartheta$$

Потенциал в точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} , равен

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}$$

Произведение $r_+ r_-$ можно заменить на r^2 . Разность $r_- - r_+$ согласно вышеописанным формулам равна $l \vec{e}_r$, следовательно,

$$\varphi(r) = \frac{q l \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ где}$$

$$\vec{p} = q \vec{l}$$

- это электрический момент диполя.

Вектор \vec{p} направлен по оси диполя от отрицательного заряда к

положительному. Видно, что поле диполя определяется его электрическим моментом. Чтобы найти напряженность поля диполя, вычислим проекции вектора \vec{E} на два взаимно перпендикулярных направления:

$$E_r = - \frac{\delta\varphi}{\delta r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}$$

Вторую проекцию получим, взяв отношение приращения потенциала φ , получающегося при возрастании угла ϑ на $d\vartheta$, к расстоянию $r d\vartheta$, на которое перемещается при этом конец отрезка r . Таким образом: $E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}$

Следовательно

$$E^2 = E_r^2 + E_\vartheta^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{p}{r^3} \right)^2 (4 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{p}{r^3} \right)^2 (1 + 3 \cos^2 \vartheta)$$

Поле бесконечной заряженной плоскости.

Пусть поверхностная плотность заряда во всех точках плоскости одинакова и равна ρ . Напряженность поля в любой точке имеет направление, перпендикулярное к плоскости. Для нахождения поля заряженной плоскости используем теорему Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных в этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0

Представим себе мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями величины ΔS ,

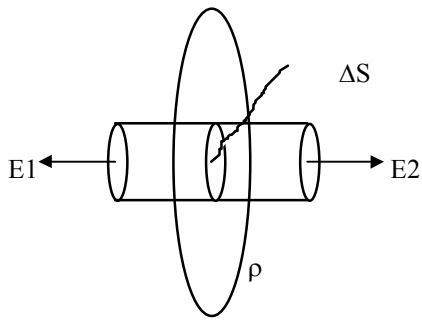


Рис. 8.3.

расположенными относительно плоскости симметрично (рисунок 8.3). В силу симметрии $E_1 = E_2 = E$.

Поток через боковую часть равен нулю. Следовательно, суммарный поток равен $2E\Delta S$. Внутри поверхности заключен заряд $\rho\Delta S$. Согласно теореме Гаусса должно выполняться условие:

$$2E\Delta S = \rho\Delta S/\varepsilon_0, \text{ следовательно: } E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}$$

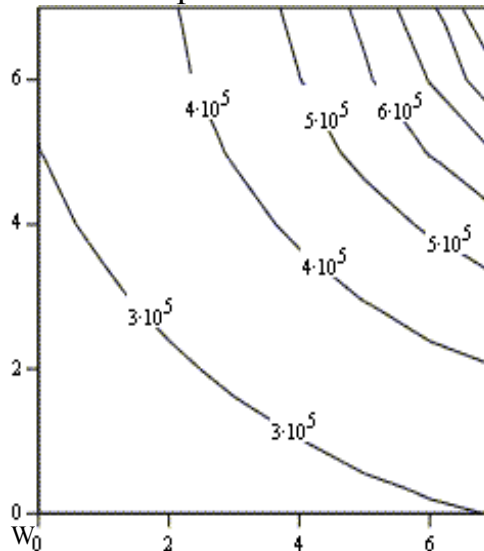
Полученный результат не зависит от длины цилиндра, значит на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине. Если взять плоскость конечных размеров, то полученный результат будет справедлив только для тех точек, расстояние до которых от края пластинки значительно превышает расстояние до самой пластинки.

Пример 8.1. Решим задачу определения поля точечного заряда с помощью программы MathCAD:

$$N := 7 \quad n := 0..N, \quad m := 0..N, \quad x_n := -3 + 0.3 \cdot n, \quad y_m := -3 + 0.4 \cdot m,$$

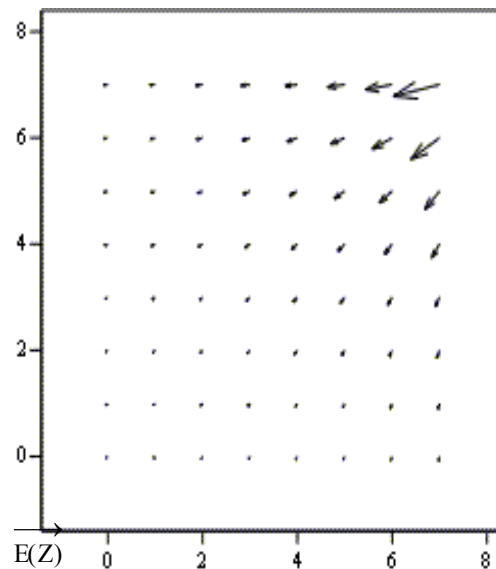
$$k := 9 \cdot 10^9, \quad q := 105 \cdot 10^{-6}, \quad \phi(x, y) := \frac{k \cdot q}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad W_{n, m} := \phi(x_n, y_m)$$

Построим эквипотенциальные поверхности:



Построим векторное поле напряженности, используя, например, функции комплексных переменных:

$$Z_{n, m} := x_n + i \cdot y_m, \quad E(Z) := \frac{k \cdot q \cdot Z}{(|Z|)^3}$$



$$\phi := \text{relax}(a, b, c, d, e, f, U, 0.9)$$

Для заданного распределения заряда в пространстве задачу вычисления потенциала в пространстве и построения эквипотенциальных поверхностей удобнее решать с помощью уравнения Пуассона: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$, где Δ - оператор Лапласа.

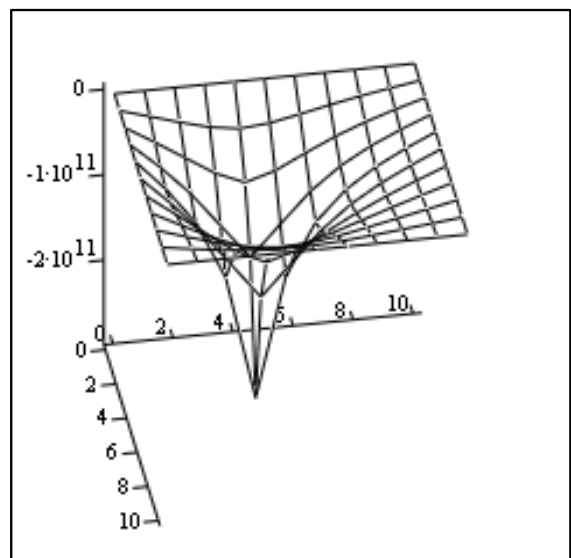
Пример N 8.2. Определим поле точечного заряда с помощью уравнения Пуассона. Для решения воспользуемся функцией relax.

$$\begin{aligned} i &:= \sqrt{-1} & k &:= 9 \cdot 10^9 & x &:= 0..10 & y &:= 0..10 & \rho_{x,y} &:= 0 & \rho_{4,4} &:= 10 \\ q &:= 1 \cdot 10^{-9} & \varepsilon_0 &:= 8.85 \cdot 10^{-12} & a_{x,y} &:= 1 & b &:= a & c &:= a \\ d &:= a & E(s) &:= k \cdot \frac{q \cdot s}{(|s|)^3} & g_x &:= -4 + x & e &:= -4 \cdot a \\ U_{x,y} &:= 0 & f &:= \frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_0} \end{aligned}$$

Здесь a, b, c, d, e – коэффициенты в решаемом уравнении, f – функция распределения заряда (показывает в каких точках находятся заряды), U – функция распределения заряда (показывает, что в остальных точках заряда нет) $r_y := -4 + y$

$$s_{x,y} := g_x + i \cdot r_y$$

Здесь g_x и r_y – координаты заряда, i – мнимая единица, $E(s)$ – выражение для напряженности поля точечного заряда.



Задания:

- 1). Рассмотреть поле диполя, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
- 2). Рассмотреть поле заряженной плоскости, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
- 3). Рассмотреть поле заряженного кольца, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
- 4). Рассмотреть поле трех точечных зарядов, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
- 5). Рассмотреть поле заряженной нити, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.

Лабораторная работа 9. Связанные моды.

Если при изучении распространения по волноводам электромагнитных волн сосредоточить внимание на самой среде, в которой разыгрываются волновые процессы, то придется иметь дело с очень сложными взаимодействиями. Но существует и другой подход. Много в поведении волн не зависит от конкретной природы и характера возмущений, связанных с волной. Много можно узнать о волнах, рассматривая их как определенный вид, или моду, возмущения среды, в которой движутся волны. Употребляя слово волна, мы будем подразумевать только одну из мод. Здесь мы используем термин “мода” для волн, распространяющихся с постоянной скоростью в средах, не изменяющихся с расстоянием. Скорость волны v можно выразить разными способами:

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}.$$

Моды, скорость v которых не зависит от частоты, называются бездисперсными модами, при этом распространяющийся импульс сохраняет свою исходную форму. Следовательно, дисперсная мода – это такая мода, для которой скорость зависит от частоты, так что импульсы расплываются при своем распространении.

На рисунке 9.1 показано, как устроен часто применяющийся элемент СВЧ-схем, известный под названием направленного ответвителя. Волновод — это металлическая труба, по которой может распространяться электромагнитная волна. Два одинаковых волновода W_1 и W_2 имеют общую стенку некоторой длины L . В этой стенке проделаны отверстия так, что волна одного волновода взаимодействует, или связывается, с волной другого волновода. В результате этого некоторая доля α мощности P_1 в первом волноводе передается в волновод W_2 , а часть $(1 - \alpha)P_1$ остается в волноводе W_1 .

Доля α мощности, которая переходит из одного волновода в другой, зависит от длины пути, на котором волны связаны, и от силы связи, то есть размера отверстий. При некоторой величине связи мы получим $\alpha=1$, а это означает, что *вся* мощность переходит из одного волновода в другой. Во многих других приборах, в том числе и в усилительных лампах бегущей волны, используются связанные волны, то есть связанные моды. К чему приводит наличие такой связи, можно установить путем простого математического анализа.

Рассмотрим сначала векторы, которые представляют волну в ее последовательных равноудаленных положениях вдоль пути распространения (рисунок 9.2). Положим, что волна представлена вектором, длина которого $|\vec{E}|$ равна E_0 . Положим далее, что при $t=0$ и $z=z_0$ вектор \vec{E} направлен вправо ($\theta=0$). В некотором положении z_1 на малом расстоянии от z_0 в направлении распространения волны мы имеем (снова при $t=0$):

$$\theta = \theta_1 = -k(z_1 - z_0).$$

Волна здесь представлена вектором той же длины E_0 , направленным немного вниз и вправо. Далее, в точке z_2

$$\theta = \theta_2 = -k(z_2 - z_0) = -k(z_1 - z_0) - k(z_2 - z_1).$$

При продвижении вперед по пути распространения волны угол θ возрастает и векторы, представляющие волну, располагаются так, как показано на рисунке 9.2. Теперь посмотрим, что случится с вектором \vec{E} (которым определяются и модуль, и фаза волны), если сдвинуться от точки z к точке $z + dz$, где dz — очень малое расстояние (рисунок 9.3). При $z + dz$ вектор \vec{E} имеет ту же длину E_0 , что и при $z = 0$, но повернут на небольшой угол по часовой стрелке. Вектор \vec{E} при $z + dz$ можно получить, добавив к \vec{E} при z малый вектор $d\vec{E}$, который составляет прямой угол с \vec{E} .

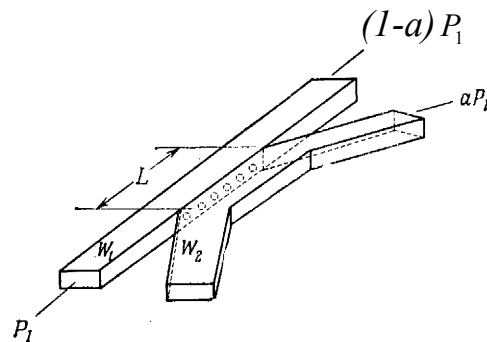


Рис. 9.1.

связаны, они взаимодействуют, и изменение напряженности одной из них сказывается на напряженности другой.

Пусть E_1 и E_2 — напряженности двух мод, которые взаимодействуют за счет некоторой связи между ними. Тогда дифференциальные уравнения для E_1 и E_2 будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dz} &= -ik_1E_1 - iME_2 \\ \frac{dE_2}{dz} &= -ik_2E_2 - iME_1\end{aligned}\tag{9.3} \text{ и } (9.4)$$

где k_1 , k_2 — постоянные распространения двух мод в отсутствие взаимодействия, а M характеризует связь или взаимодействие между данными модами. То, что коэффициенты k_1 , k_2 и M — действительные величины в уравнениях (9.3) и (9.4), гарантирует нам, что эти уравнения консервативные, то есть, что полная энергия не изменяется при переходе от z к $z + dz$.

Решения уравнений (9.3) и (9.4) имеют вид:

$$E_1 = E_{10}e^{-ikz},\tag{9.5}$$

$$E_2 = E_{20}e^{-ikz}.\tag{9.6}$$

Продифференцировав обе части равенств (9.5) и (9.6), мы получим:

$$\frac{dE_1}{dz} = -ikE_{10}e^{-ikz} = -ikE_1,\tag{9.7}$$

$$\frac{dE_2}{dz} = -ikE_{20}e^{-ikz} = -ikE_2\tag{9.8}$$

Из равенств (9.7), (9.8) и (9.3), (9.4) следует, что

$$(k - k_1)E_1 = ME_2,\tag{9.9}$$

$$(k - k_2)E_2 = ME_1.\tag{9.10}$$

Перемножив левые и правые стороны обоих равенств и разделив их затем на E_1E_2 , получим

$$(k - k_1)(k - k_2) = M^2,\tag{9.11}$$

или

$$k^2 - (k_1 + k_2)k + (k_1k_2 - M^2) = 0.\tag{9.12}$$

Решение этого квадратного уравнения таково:

$$k = \frac{k_1 + k_2 \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4(M^2 - k_1k_2)}}{2}.\tag{9.13}$$

или, после небольших преобразований,

$$k = \frac{k_1 + k_2 \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4M^2}}{2} \quad (9.14)$$

Если $M = 0$, то есть, если нет связи между модами, то формула (9.14) дает два значения величины k :

$$\begin{aligned} k &= k_1, \\ k &= k_2. \end{aligned}$$

Так и должно быть. При $M \neq 0$ мы тоже получаем два значения величины k , но они не равны k_1 и k_2 . Посмотрим, каков смысл этого. Применим наши уравнения к случаю двух одинаковых связанных волноводов в направленном ответвителе (рис.9.1). Фазовые постоянные обоих волноводов (в пренебрежении связью) одинаковы. Обозначим эту общую фазовую постоянную в отсутствие связи через k_0 , тогда

$$k_1 = k_2 = k_0. \quad (9.15)$$

Из формулы (9.14) с учетом равенства (9.15) мы получим две фазовые постоянные (соответствующие знакам «+» и «—»), которые обозначим через $k_{\text{МЕДЛ}}$ и $k_{\text{БЫСТР}}$:

$$k_{\text{МЕДЛ}} = k_0 + M, \quad (9.16)$$

$$k_{\text{БЫСТР}} = k_0 - M. \quad (9.17)$$

В этом примере \vec{E}_1 и \vec{E}_2 — напряженности волн в двух волноводах. Соотношение (9.9) мы можем переписать в виде:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{k - k_0}{M}. \quad (9.18)$$

Мы видим, что для волн с фазовыми постоянными $k_{\text{МЕДЛ}}$ и $k_{\text{БЫСТР}}$ [формулы (9.16) и (9.17)] отношения амплитуд $E_{2\text{МЕДЛ}}/E_{1\text{МЕДЛ}}$ и $E_{2\text{БЫСТР}}/E_{1\text{БЫСТР}}$ даются выражениями

$$\frac{E_{2\text{МЕДЛ}}}{E_{1\text{МЕДЛ}}} = \frac{k_0 + M - k_0}{M} = 1, \quad (9.19)$$

$$\frac{E_{2\text{БЫСТР}}}{E_{1\text{БЫСТР}}} = \frac{k_0 - M - k_0}{M} = -1. \quad (9.20)$$

В отсутствие связи ($M=0$) мы имеем две моды. Одна распространяется в волноводе 1 с амплитудой E_1 и фазовой постоянной k_0 , а другая распространяется в волноводе 2 с амплитудой E_1 и фазовой постоянной k_0 .

При наличии связи ($M \neq 0$) у нас тоже две моды. Но каждая из них представляет собой волну в обоих волноводах. Одна мода, «медленная» волна, имеет фазовую постоянную $k_{\text{МЕДЛ}}$; при такой моде напряженность волны одинакова в обоих волноводах. Другая мода, «быстрая» волна, имеет фазовую постоянную $k_{\text{БЫСТР}}$; при такой моде напряженности в обоих волноводах равны, но противоположны по знаку.

Предположим, что при $z=0$ две волны в волноводе 1 имеют одинаковую напряженность $E_0/2$. Тогда в соответствии с формулами (9.19) и (9.20) в волноводе 2 напряженности волн равны и противоположны по знаку. В волноводе 1 полная напряженность двух волн $E_{1\text{ПОЛН}}$ будет:

$$E_{1\text{ПОЛН}} = \frac{E_0}{2} (e^{-i(k_0+M)z} + e^{-i(k_0-M)z}). \quad (9.21)$$

В волноводе 2 полная напряженность волны $E_{2\text{ПОЛН}}$ будет:

$$E_{2\text{ПОЛН}} = \frac{E_0}{2} (e^{-i(k_0+M)z} - e^{-i(k_0-M)z}). \quad (9.22)$$

Мы видим, что при $z = 0$ полная напряженность волны в волноводе 1 равна E_0 , а в волноводе 2 равна нулю. А как будет изменяться эта напряженность с расстоянием? Мы можем переписать выражения (9.21) и (9.22) в виде:

$$E_{1\text{ПОЛН}} = \frac{E_0}{2} e^{-ik_0z} (e^{iMz} + e^{-iMz}) = E_0 e^{-ik_0z} \cos Mz, \quad (9.23)$$

$$E_{2\text{ПОЛН}} = -\frac{iE_0}{2i} e^{-ik_0z} (e^{iMz} - e^{-iMz}) = -iE_0 e^{-ik_0z} \sin Mz. \quad (9.24)$$

Мы видим, что с увеличением z полная напряженность волны в волноводе 1 постепенно уменьшается, а напряженность волны в волноводе 2 постепенно увеличивается. При $Mz = \pi/2$ напряженность волны в волноводе 1 равна нулю, а в волноводе 2 она равна iE_0 , то есть по абсолютной величине такая же, как в волноводе 1 при $z=0$. При $Mz = \pi/2$ вся мощность переходит из волновода 1 в волновод 2. В случае, если фазовые постоянные связанных волноводов не одинаковы, связь опять-таки приводит к наличию двух мод, каждая со своей амплитудой в каждом из волноводов. Но амплитуды каждой из мод уже не будут равны в двух волноводах. Одна мода будет иметь фазовую постоянную, близкую к k_1 , то есть, к фазовой постоянной волновода 1, и при такой моде напряженность волны в волноводе 1 будет больше, чем в волноводе 2. Для другой моды фазовая постоянная будет близка к k_2 фазовой постоянной волновода 2, и при такой моде напряженность волны в волноводе 2 будет больше, чем в волноводе 1. При неодинаковых фазовых постоянных волноводов полный переход мощности из одного волновода в другой оказывается невозможным. Фазовые постоянные мод могут по-разному изменяться с изменением частоты. Представим себе, что график зависимости ω от k для двух мод в отсутствие связи имеет вид штриховых прямых на рисунке 9.4. Далее, предположим, что имеется некоторая связь между модами.

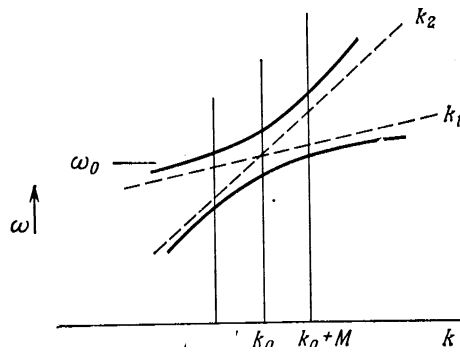


Рис. 9.4.

На частоте ω_0 фазовые постоянные k_1 и k_2 имеют одинаковую величину k_0 . Из сказанного ранее вытекает, что в таком случае мы имеем две волны с фазовыми постоянными $k_0 + M$ и $k_0 - M$. Из формулы (9.14) мы найдем, что зависимость ω от k для двух связанных мод имеет вид сплошных линий, показанных на рисунке 9.4. Эти кривые представляют собой гиперболы, для которых штриховые прямые служат асимптотами.

Пример 9.1. Рассмотрим с помощью программы MathCAD задачу определения поля в волноводе. Решим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d}{dz} E_1 = -j \cdot k_1 E_1 - j \cdot M \cdot E_2$$

$$\frac{d}{dz} E_2 = -j \cdot k_2 E_2 - j \cdot M \cdot E_1$$

Для решения данной системы уравнений воспользуемся соотношениями:

$$E_1 = E1 + j \cdot E11$$

$$E_2 = E2 + j \cdot E22$$

Подставим в систему и получим:

$$\frac{d}{dz} (E1 + j \cdot E11) = -j \cdot k_1 \cdot E1 + k_1 \cdot E11 - j \cdot M \cdot E2 + M \cdot E22$$

$$\frac{d}{dz} (E2 + j \cdot E22) = -j \cdot k_2 \cdot E2 + k_2 \cdot E22 - j \cdot M \cdot E1 + M \cdot E11$$

Выделим действительную и мнимую часть и получим систему уравнений; затем решим её, используя функцию rkfixed.

$$\frac{d}{dz} E1 = k_1 \cdot E11 + M \cdot E22$$

$$\frac{d}{dz} E11 = -k_1 \cdot E1 - M \cdot E2$$

$$\frac{d}{dz} E2 = k_2 \cdot E22 + M \cdot E11$$

$$\frac{d}{dz} E22 = -k_2 \cdot E2 - M \cdot E1$$

1). Частный случай: отсутствии связи между модами и $k_1 = k_2$:

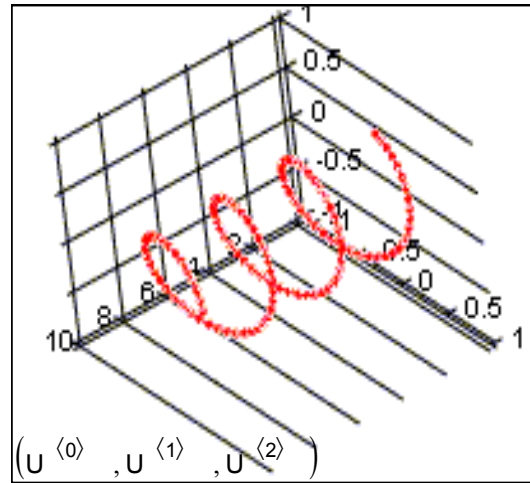
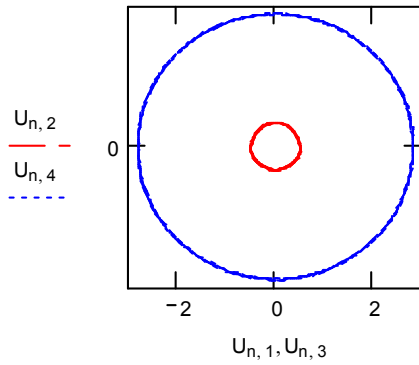
$$M := 0$$

$$E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$k1 := 2 \quad k2 := 2$$

$$D(z, E) := \begin{pmatrix} k1 \cdot E_1 + M \cdot E_3 \\ -k1 \cdot E_0 - M \cdot E_2 \\ k2 \cdot E_3 + M \cdot E_1 \\ -k2 \cdot E_2 - M \cdot E_0 \end{pmatrix}$$

U := rkfixed(E, 0, 50, 600, D)
n := 0.. 300



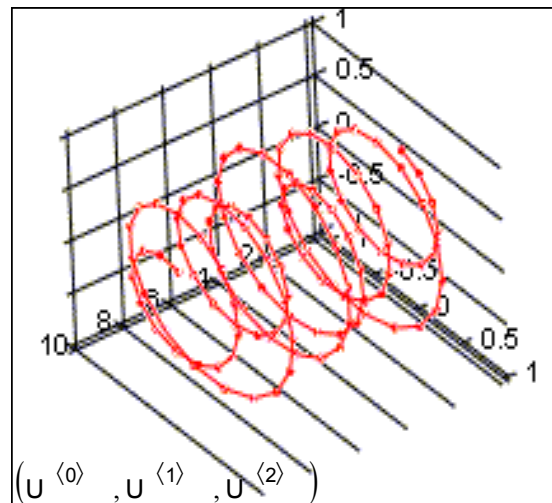
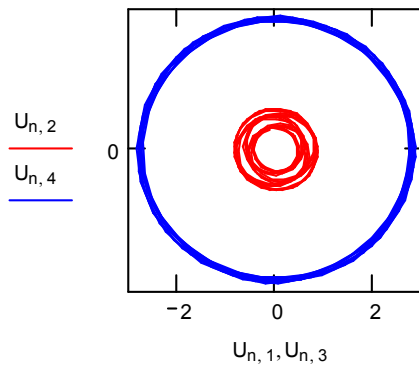
2). Наличие связи между модами:

M := 0.15 k1 := 5 k2 := 3

$$E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D(z, E) := \begin{pmatrix} k1 \cdot E_1 + M \cdot E_3 \\ -k1 \cdot E_0 - M \cdot E_2 \\ k2 \cdot E_3 + M \cdot E_1 \\ -k2 \cdot E_2 - M \cdot E_0 \end{pmatrix}$$

U := rkfixed(E, 0, 50, 600, D)
n := 0.. 300



3) Изменение напряженности мод с расстоянием:

$$E_0 := 1 \quad k_0 := 3 \quad z := 0, 0.1 \dots 6 \cdot \pi \quad E(z) := E_0 \cdot e^{-i \cdot k_0 \cdot z} \cdot \cos(M \cdot z)$$

напряженность двух мод в первом волноводе:

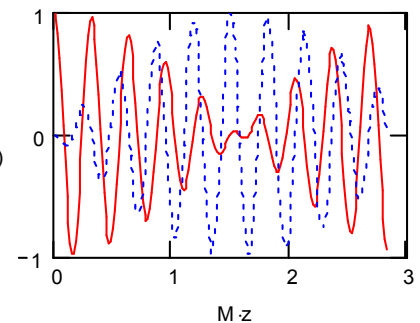
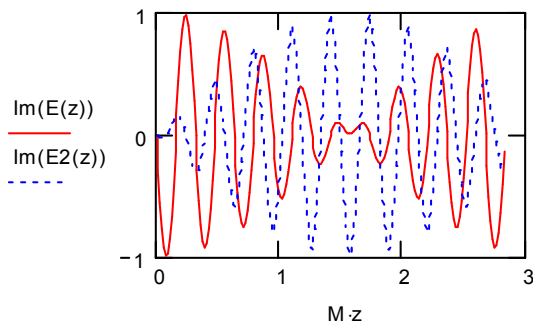
$$E_2(z) := -i \cdot E_0 \cdot e^{-i \cdot k_0 \cdot z} \cdot \sin(M \cdot z)$$

напряженность двух мод во втором волноводе:

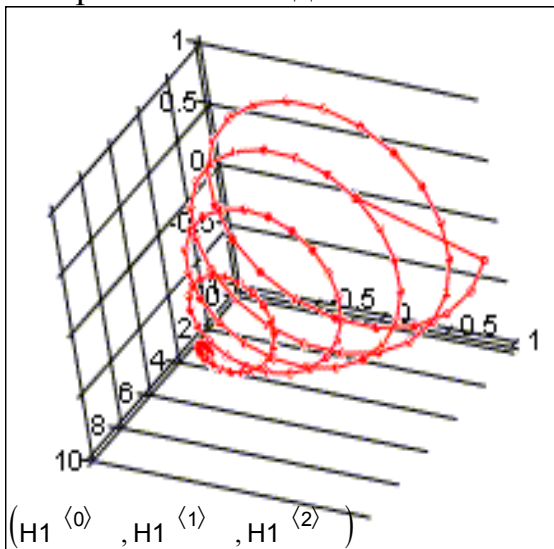
$$k := 1 \dots 100 \quad w := 1 \dots 100 \quad x_k := 10 \cdot \frac{k}{100} \quad x_{2w} := 10 \cdot \frac{w}{100}$$

$$H_{1,k,0} := x_k \quad H_{w,0} := x_w \quad H_{1,k,1} := \operatorname{Re}(E(x_k)) \quad H_{2,w,1} := \operatorname{Re}(E_2(x_w))$$

$$H_{1,k,2} := \operatorname{Im}(E(x_k)) \quad H_{2,w,2} := \operatorname{Im}(E_2(x_w))$$



В первом волноводе:



Во втором волноводе:

