

Астраханский государственный университет

Ю.Ю. Тарасевич, И.В. Водолазская

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Астрахань, 2004

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 1 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Оглавление

1	АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР	4
1.1.	Задачи, приводящие к понятию ангармонического осциллятора	5
1.2.	Фазовые траектории	12
2	АВТОКОЛЕБАНИЯ	16
2.1.	Введение	17
2.2.	Качественное рассмотрение автоколебательных систем	19
2.3.	Количественное рассмотрение автоколебаний	21
2.4.	Генератор релаксационных колебаний	27
3	ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	30
3.1.	Введение	31
3.2.	Математический маятник. Общий случай изменения параметра	38
3.3.	Элементы математической теории	39
4	СВЯЗАННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ	41
4.1.	Системы, состоящие из двух связанных осцилляторов	42
4.1.1.	Простейшие примеры	42
4.1.2.	Общий метод нахождения нормальных координат и нормальных мод	49

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 2 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

4.1.3. Случай слабой связи	52
4.1.4. Вынужденные колебания связанных осцилляторов	53
4.2. Системы N связанных осцилляторов	57
4.2.1. Постановка задачи	57
4.2.2. Длинноволновое приближение	58
4.2.3. Точное решение	61
4.2.4. Цепочка из различных звеньев	63
4.2.5. Домашний эксперимент	64
5 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ	67
5.1. Введение	68
5.2. Вывод уравнения sin -Гордона	69
5.3. Стационарные решения	71
5.3.1. Стационарное решение уравнения КдФ	71
5.3.2. Стационарное решение уравнения синус-Гордона	77
Литература	79

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Страница 3 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Глава 1

АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

[Home Page](#)

[Титульная страница](#)

[Содержание](#)

[«](#) [»](#)

[«](#) [»](#)

Страница 4 из 80

[Назад](#)

[Full Screen](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)

1.1. Задачи, приводящие к понятию ангармонического осциллятора

Как хорошо известно, гармонический осциллятор — это система, уравнение движения которой описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.1)$$

где x — величина, совершающая колебания, ω — циклическая частота.

В зависимости от природы гармонического осциллятора и характера колебательного процесса под x могут пониматься самые разнообразные физические величины, например, смещение тела из положения равновесия, угол отклонения, заряд в колебательном контуре и т. д.

Следует, однако, понимать, что гармонический осциллятор — всего лишь модель, более или менее точно описывающая реальный процесс. Эта модель оказывается весьма удобной в целом ряде случаев, но далеко не всегда пригодна для описания сложных колебательных процессов, встречающихся в природе и технике.

Давайте рассмотрим некоторые примеры, выходящие за рамки модели гармонического осциллятора.

Пример 1.1. Большие колебания физического маятника.

Уравнение колебаний физического маятника имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.2)$$

где $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$, m — масса маятника, J — его момент инерции относительно оси вращения, l — расстояние от точки подвеса до центра масс, g — ускорение свободного падения, φ — угол отклонения из положения равновесия. Разложим $\sin \varphi$ в ряд Тейлора

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (1.3)$$

[Home Page](#)[Титульная страница](#)[Содержание](#)[Страница 5 из 80](#)[Назад](#)[Full Screen](#)[Закреть](#)[Выход](#)

При малых углах отклонения ($\varphi < 10^\circ$) $\sin \varphi \approx \varphi$ и уравнение (1.2) переходит в уравнение гармонического осциллятора (1.1). Для уточнения решения можно учесть следующий член в разложении (1.3), тогда

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Полученное уравнение может быть решено, например, методами теории возмущений.

Перепишем уравнение (1.4) в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3. \quad (1.5)$$

Если углы отклонения φ не очень велики, то правую часть уравнения (1.5) можно считать малой поправкой (возмущением). При возмущении равно нулю уравнение (1.5) переходит в (1.1) и его решение

$$\varphi = \varphi_w \sin \omega_0 t. \quad (1.6)$$

Будем искать решение уравнения (1.5) в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t + \varphi_1(t), \quad (1.7)$$

где $\varphi_1(t)$ — поправка к невозмущенному решению. Подставим (1.7) в (1.5)

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \frac{\omega_0^2}{6} (\varphi_0^3 \sin^3(\omega_0 t) + 3\varphi_1 \varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + 3\varphi_1^2 \varphi_0 \sin(\omega_0 t) + \varphi_1^3). \quad (1.8)$$

Учитывая малость поправки φ_1 , пренебрежем в правой части уравнения (1.6) слагаемыми, в которые входит φ_1 .

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 \approx \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi_0^3 \sin^3(\omega_0 t). \quad (1.9)$$

[Home Page](#)[Титульная страница](#)[Содержание](#)[Страница 6 из 80](#)[Назад](#)[Full Screen](#)[Закреть](#)[Выход](#)

Поскольку

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha), \quad (1.10)$$

решение уравнения (1.7) следует искать в виде

$$\varphi_1 = A \sin \omega_0 t + B \sin 3\omega_0 t. \quad (1.11)$$

Таким образом, решением возмущенного уравнения является суперпозиция колебаний с частотами ω_0 и $3\omega_0$. Логично было бы предположить, что и решение уравнения (1.2) будет содержать набор высших гармоник. Наличие в спектре колебаний с кратными частотами (гармоник) — наиболее важная характерная черта нелинейных колебаний.

Найдем период больших колебаний, используя закон сохранения энергии для незатухающих колебаний $W_k + W_p = W$. Для уравнения (1.2) закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = W. \quad (1.12)$$

Тогда период колебаний можно вычислить по формуле

$$T = 2 \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J}(W - mgl(1 - \cos \varphi))}}. \quad (1.13)$$

Учтя, что $W = mgl(1 - \cos \varphi_{\max})$, имеем

$$T = \sqrt{\frac{2J}{mgl}} \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}}. \quad (1.14)$$

Таким образом $T = T(\varphi_{\max})$. Если угол φ_{\max} не очень велик, то $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, $\cos \varphi_{\max} \approx 1 - \frac{\varphi_{\max}^2}{2}$ и (1.14) преобразуется к виду

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Страница 7 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход



$$T = 2\sqrt{\frac{J}{mgl}} \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_{\max}^2 - \varphi^2}} = 2\sqrt{\frac{J}{mgl}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \Big|_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (1.15)$$

В случае не очень больших колебаний мы получили обычную формулу для периода колебаний. Период колебаний не зависит от амплитуды — колебания изохронны.

Для произвольных углов формула (1.14) может быть приведена к виду

$$T = 4\sqrt{\frac{J}{mgl}} K\left(\sin^2 \frac{\varphi_{\max}}{2}\right), \quad (1.16)$$

где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 k^{2n} \right\}$$

— *полный эллиптический интеграл первого рода*.

На рис. 1.1 представлено отношение $\frac{T}{T_0}$ для различных значений амплитуды колебаний φ_0 (в радианах), где T_0 — период колебаний гармонического осциллятора.

Выбирая верхний предел интеграла (1.13) произвольно, мы можем получить зависимость $t(\varphi)$, которая, естественно, так же выражается через эллиптические интегралы. Функции, обратные к эллиптическим интегралам, называются *эллиптическими функциями*. Через эллиптические функции может быть выражена зависимость $\varphi(t)$.

Уравнение (1.2) описывает ангармонический осциллятор. Его решение можно представить в виде суперпозиции нескольких гармонических решений. Результаты решения уравнения (1.2) представлены на рис. 1.2 (зависимость $x(t)$) и на рис. 1.3 (зависимость $x'(t)$). Любопытно поведение ангармонического осциллятора под действием внешней гармонической силы. Наличие в решении высших гармоник приводит к тому, что резонанс может наступить на различных частотах, кратных собственной частоте гармонического осциллятора. Неизохронность колебаний, то есть зависимость периода (частоты

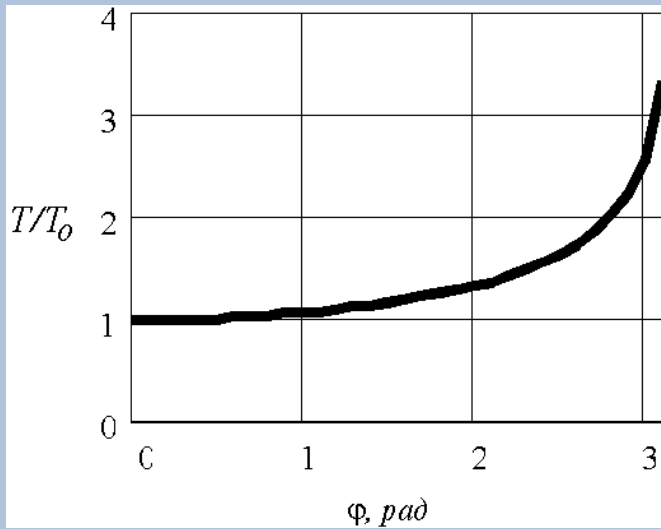


Рис. 1.1.

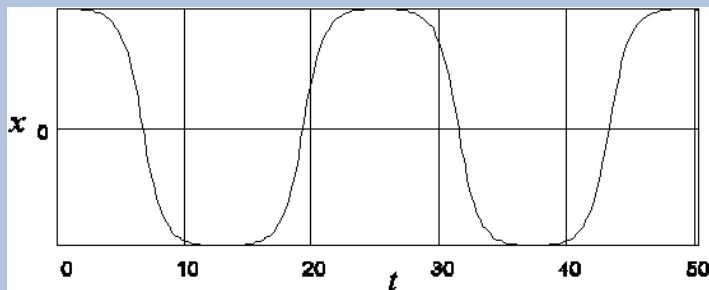


Рис. 1.2.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Страница 9 из 80

Назад

Full Screen

Закрывать

Выход

колебаний) от амплитуды приводит к тому, что при резонансе собственная частота осциллятора меняется и он выходит из резонанса.

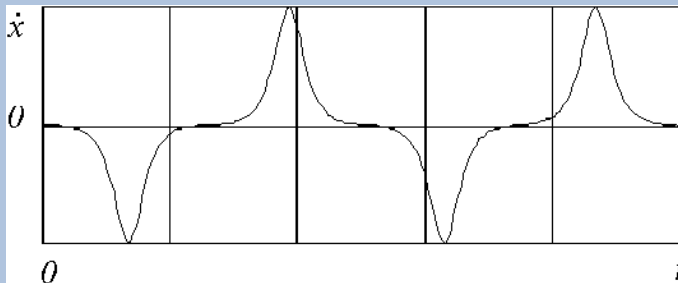


Рис. 1.3.

Пример 1.2. Большие колебания пружинного маятника.

Как известно, закон Гука выполняется только при небольших деформациях. В произвольном случае $F_{\text{упр}} = f(x)$, где $f(x)$ — некоторая функция. Если разложить функцию в ряд Тейлора, то

$$f(x) = kx + k_1x^3 + k_2x^5 + \dots \quad (1.17)$$

($f(x)$ — нечетная функция, т. к. сила упругости меняет знак при изменении направления деформации на противоположное, следовательно, разложение должно содержать только нечетные степени x). Если ограничиться первыми двумя членами разложения, то уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \left(x + \frac{k_1}{k} x^3 \right) = 0. \quad (1.18)$$

Сравните с уравнением (1.4).

Пример 1.3. Колебательный контур с переменной индуктивностью.

Известно, что индуктивность соленоида с магнитным сердечником зависит от силы тока в соленоиде $L = L(I)$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (1.19)$$

Поскольку, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то циклическая частота зависит от силы тока. Если считать, что токи в катушке малы, то можно считать зависимость почти линейной $L = L_0(1 + \alpha I)$

$$\ddot{q} + \frac{1}{L_0 C}(1 - \alpha \dot{q})q = 0. \quad (1.20)$$

Пример 1.4. Движение с большой скоростью в вязкой среде.

Известно, что при движении в жидкости или газе с малыми скоростями сила сопротивления пропорциональна скорости (ламинарное движение, сила вязкого трения преобладает над силой лобового сопротивления). При движении с большими скоростями определяющую роль играет сила лобового сопротивления и сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

Для большого диапазона скоростей силу сопротивления можно представить в виде

$$\vec{F} = -k_1 \vec{v} - k_2 v \vec{v}, \quad (1.21)$$

причем $k_1 \gg k_2$.

С учетом силы сопротивления (1.17) уравнение движения гармонического осциллятора имеет вид.

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x}(1 + \alpha |\dot{x}|) + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.22)$$

1.2. Фазовые траектории

Состояние любой системы может быть представлено в виде точки в фазовом пространстве — пространстве координат и импульсов (скоростей) материальных точек, входящих в состав системы. Действительно, задавая координаты и скорость материальной точки, мы однозначно определяем ее состояние. Эволюция системы (т.е. ее изменение со временем) будет изображаться в виде кривой в фазовом пространстве — фазовой траектории. Фазовое пространство, заполненное непересекающимися фазовыми траекториями, называется фазовым портретом системы.

Существуют методы, позволяющие определить характер фазовых траекторий, не решая дифференциальное уравнение. Анализом поведения фазовых траекторий занимается раздел математики, носящий название теория динамических систем.

В том случае, когда точное решение дифференциального уравнения не может быть найдено, анализ поведения системы проводится на основе фазового портрета.

Кривая на рис. 1.4 соответствует колебательному движению, т.к. система по истечении определенного времени возвращается в исходное состояние.

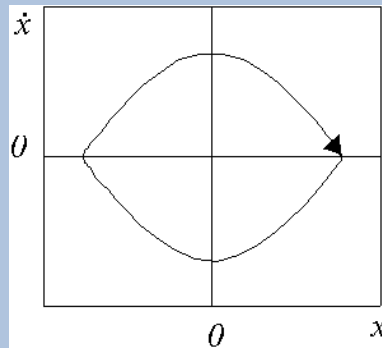


Рис. 1.4.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 12 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Кривая на рис. 1.5 соответствует аperiodическому движению.

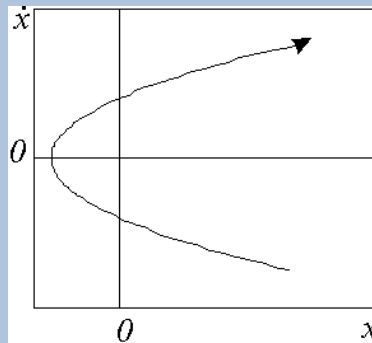


Рис. 1.5.

В частности, фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс (рис. 1.6). Действительно, решение уравнения (1.1) может быть записано в виде $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Тогда выражение для скорости $v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Исключая время, получаем зависимость $v(x)$: $x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = A^2$.

Фазовая траектория в случае затухающих колебаний гармонического осциллятора — стягивающаяся спираль. (Рис. 1.7)

В случае установления вынужденных колебаний — разворачивающаяся спираль. Предельный эллипс соответствует установившимся колебаниям. (рис. 1.8)

Фазовый портрет маятника представлен на рис. 1.9. Гармоническому движению соответствуют эллиптические траектории вблизи центра, вращательному движению — волнообразные траектории по краям, сильно деформированные эллипсы — ангармонические колебания. Линия, разделяющая траектории, которые соответствуют периодическому и вращательному движению, называется *сепаратриса*.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀

▶

◀

▶

Страница 13 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

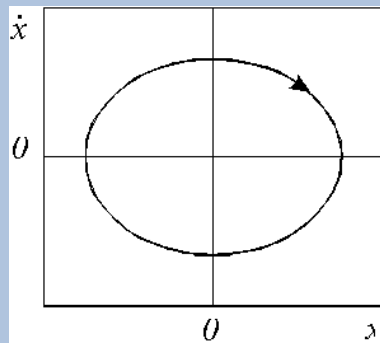


Рис. 1.6.

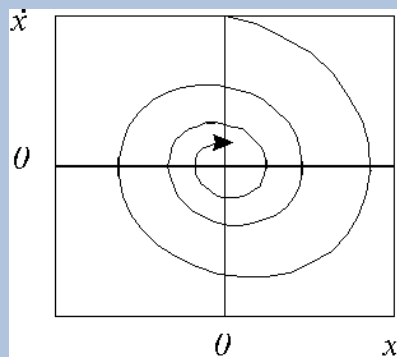


Рис. 1.7.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 14 из 80

Назад

Full Screen

Закрыть

Выход

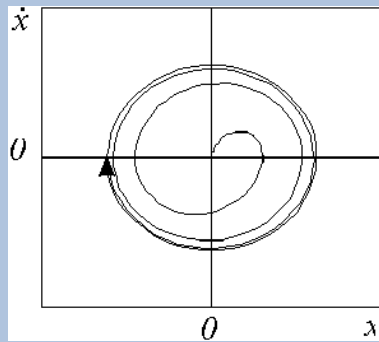


Рис. 1.8.

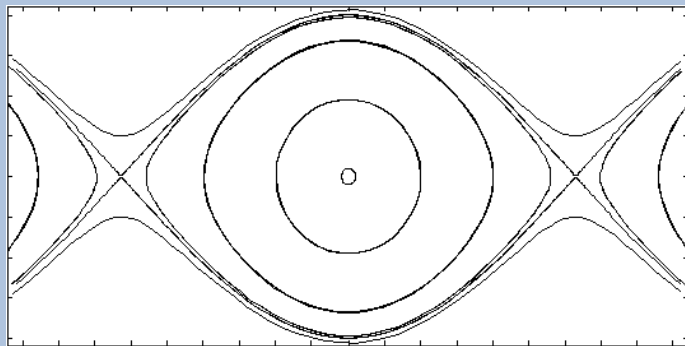


Рис. 1.9.

[Home Page](#)

[Титульная страница](#)

[Содержание](#)



[Страница 15 из 80](#)

[Назад](#)

[Full Screen](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)

Глава 2

АВТОКОЛЕБАНИЯ

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 16 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

2.1. Введение

Автоколебания — незатухающие колебания в диссипативных нелинейных системах, которые поддерживаются за счет внешнего источника энергии. Вид и свойства этих колебаний (частота, амплитуда, форма) определяются самой системой и не зависят от начальных условий.

Характерная особенность автоколебаний — отсутствие внешнего периодического воздействия.

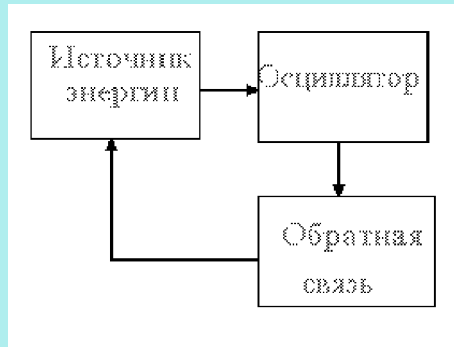


Рис. 2.1.

Схематично автоколебательную систему можно представить в виде источника энергии, осциллятора с затуханием и обратной связи (нелинейного элемента) (Рис. 2.1).

Осциллятор сам регулирует поступление энергии от внешнего источника, что отличает автоколебания от вынужденных колебаний, когда внешний источник определяет, когда и сколько энергии передать осциллятору, задавая тем самым частоту, амплитуду, фазу и форму колебаний. При автоколебаниях, благодаря наличию нелинейного элемента обеспечивается согласование подачи энергии с работой осциллятора.

Home Page

Титульная страница

Содержание

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 17 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Автоколебания окружают нас повсюду в природе и технике: часы, звучащая скрипичная струна или органная труба, бьющееся сердце — все эти системы совершают автоколебания.

[Home Page](#)

[Титульная страница](#)

[Содержание](#)



Страница 18 из 80

[Назад](#)

[Full Screen](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)

2.2. Качественное рассмотрение автоколебательных систем

Пример 2.1. Звучание скрипичной струны.

Хорошо известно, что сила трения скольжения практически не зависит от скорости. Однако именно благодаря очень слабой зависимости силы трения от скорости звучит скрипичная струна. Качественный вид зависимости силы трения смычка о струну показан на рис. 2.2.

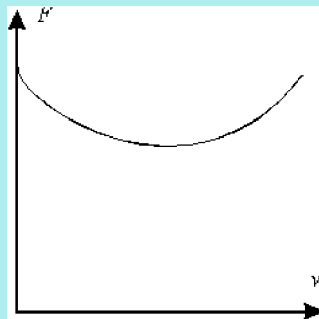


Рис. 2.2.

Благодаря силе трения покоя струна захватывается смычком и смещается из положения равновесия. Когда сила упругости превысит силу трения, струна оторвется от смычка и устремится к положению равновесия со все возрастающей скоростью. Скорость струны относительно движущегося смычка будет возрастать, сила трения увеличится и в определенный момент станет достаточной для захвата струны. Затем процесс повторится вновь.

Таким образом, движущийся с постоянной скоростью смычок, вызовет незатухающие колебания струны.

Home Page

Титульная страница

Содержание

« «

» »

«

»

Страница 19 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Пример 2.2. «Перемежающийся источник».

С древнейших времен люди используют систему регулировки уровня воды, представленную на рис. 2.3 .

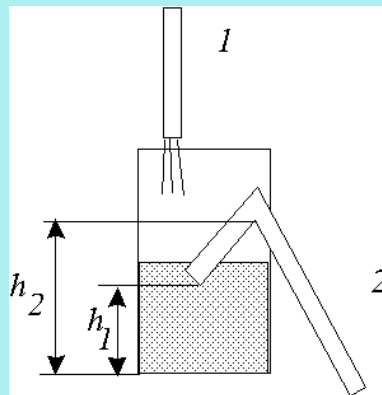


Рис. 2.3.

Вода поступает с постоянной скоростью по трубе 1 в сосуд. Когда уровень воды в сосуде превысит высоту h_2 , вода начнет выливаться через сифон 2, пока ее уровень не опустится до высоты h_1 . Простейшая система обеспечивает колебания уровня воды в сосуде (периодическое выливание воды строго определенными порциями), в то время, как вода поступает в сосуд равномерно.

Пример 2.3. Часы.

Хорошо известно, что работа механических часов обеспечивается закрученной пружиной. Благодаря анкерному механизму маятник часов дважды за период колебаний получает толчки (порции энергии) от раскручивающейся пружины. Анкер — особый рычаг, насаженный на одну ось с маятником, — освобождает в нужный момент сжатую пружину и получает от нее энергию.

2.3. Количественное рассмотрение автоколебаний

Пример 3.1. Механическая система.

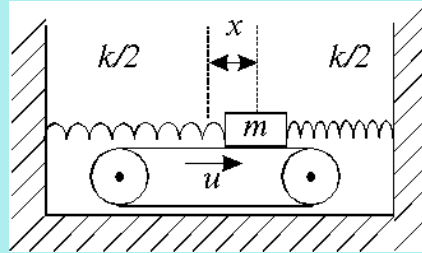


Рис. 2.4.

Рассмотрим систему, представленную на рис. 2.4 Брусок массы m , лежащий на ленте транспортера, прикреплен к стене горизонтальными пружинами с коэффициентами жесткости $\frac{k}{2}$. Лента транспортера движется с постоянной скоростью u . Между бруском и лентой действует сила трения скольжения.

Эта модель может служить для описания колебаний скрипичной струны: лента — смычок, брусок с пружинами — струна.

Запишем II закон Ньютона для бруска $ma = -kx - rv + f$. Первое слагаемое в правой части уравнения описывает силы упругости, второе — силу вязкого трения (v — скорость бруска, r — коэффициент сопротивления), последнее слагаемое — сила трения скольжения, которая зависит от скорости бруска относительно ленты: $f = f(u - v) = f(u - \dot{x})$. Будем полагать, что характер зависимости силы трения от относительной скорости соответствует рис. 2.5. Силу трения можно представить в виде ряда, полагая, что относительные скорости не очень велики,

$$f(u - \dot{x}) \approx f_0 + f_1 \dot{x} + f_2 \dot{x}^2 + \dots \quad (2.1)$$



Ограничившись первыми двумя членами разложения, можно записать уравнение движения бруска в виде $\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega^2 y = 0$, где $y = x - \frac{f_0}{k}$ — определяет смещение бруска из положения равновесия на ленте, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{r-f_1}{m}$. Полученное уравнение формально ничем не отличается от уравнения затухающих колебаний. Однако декремент затухания β в нашем случае может быть как положительным, так и отрицательным. Очевидно, что при отрицательном значении декремента затухания в системе возникнут нарастающие по экспоненте колебания. В этом случае говорят, что система с «отрицательным трением». Условием возбуждения в системе нарастающих колебаний является $f_1 > r$.

В линейной системе ничто не мешает экспоненциально увеличиваться амплитуде колебаний до бесконечности. Однако при больших амплитудах колебаний относительная скорость бруска становится большой и в разложении (2.1) уже нельзя ограничиваться только двумя первыми членами, то есть система становится нелинейной. Именно благодаря нелинейности в системе происходит установление колебаний конечной амплитуды.

Учет следующего слагаемого в разложении силы сопротивления (2.1) приводит к нелинейному уравнению.

Пример 3.2. Ламповый генератор.

На рис. 2.5 ламповый генератор с контуром в цепи сетки. Это всего лишь одна из возможных схем генератора (например, катушка может быть включена в цепь анода, вакуумный триод может быть заменен полупроводниковым — транзистором). Если бы триод отсутствовал, то в контуре RLC могли бы возникнуть затухающие электромагнитные колебания. Однако благодаря индуктивной связи с коэффициентом взаимной индукции M между катушками L и L' , на сетку триода подается переменное напряжение, которое регулирует ток через триод и обеспечивает поступление энергии в колебательный контур.

По правилам Кирхгофа для колебательного контура можно записать

$$-U + IR = -L \frac{dI}{dt} - M \frac{dI'}{dt},$$

где $I = -\dot{q} = -C\dot{U}$, $I' = -C\ddot{U}$, $\frac{dI'}{dt} = \frac{dI'}{dU} \cdot \frac{dU}{dt} = S(U) \dot{U}$.

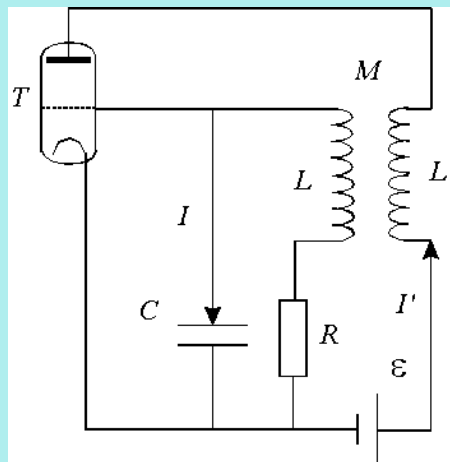


Рис. 2.5.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 23 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход



Величина $S(U)$ называется *сеточной характеристикой* лампы — это величина, обратная дифференциальному сопротивлению лампы. С учетом введенных обозначений $LC\ddot{U} - MS(U)\dot{U} + RC\dot{U} + U = 0$.

Полученное уравнение напоминает уравнение затухающих колебаний в контуре. Если $RC - MS < 0$, то система имеет отрицательное сопротивление, и колебания в ней будут нарастать. В связи с тем, что S — функция напряжения, система является нелинейной, и при определенной амплитуде колебаний произойдет стабилизация. Будем полагать, что для аппроксимации сеточной характеристики достаточно двух слагаемых: $S(U) \approx S_0 - S_2U^2$ и введем обозначения $\alpha = \frac{MS_0 - RC}{LC}$, $\beta = \frac{2MS_2}{RC - MS_0}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Тогда

$$\ddot{U} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение автоколебаний (2.2) обычно записывают в безразмерном виде. Вводя новые переменные $\tau = \omega_0 t$, $x = \sqrt{\beta}U$, $\mu = \alpha\omega_0$, получаем

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется *уравнением Ван дер Поля*.

При $\mu \ll 1$ в системе возникают квазигармонические автоколебания (рис. 2.6а)), при $\mu \approx 1$ — сильно несинусоидальные колебания (рис. 2.6б)) и при $\mu \gg 1$ — релаксационные колебания (рис. 2.6в)).

Фазовая траектория автоколебаний представлена на рис. 2.7. Независимо от начальных условий все фазовые траектории стягиваются к *предельному циклу* — замкнутой траектории, соответствующей стационарному режиму. В нашем случае автоколебания устанавливаются в системе при любых начальных условиях, в том числе и при нулевых начальных значениях тока и напряжения. Такой режим возбуждения автоколебаний называется *мягким*.

Существуют системы, в которых автоколебания могут возникнуть только в результате начальной точки не менее определенной величины. Такой режим возбуждения колебаний называется *жестким*.

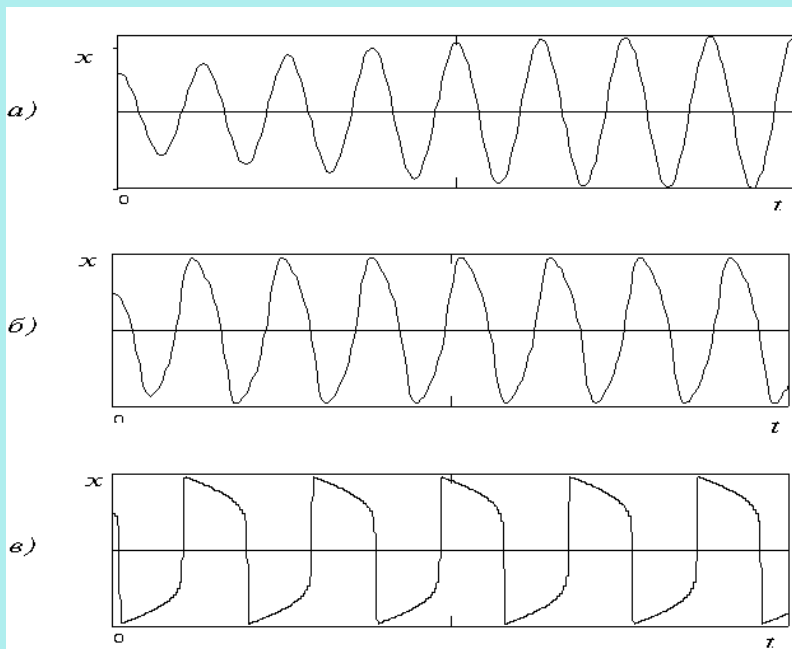


Рис. 2.6.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 25 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

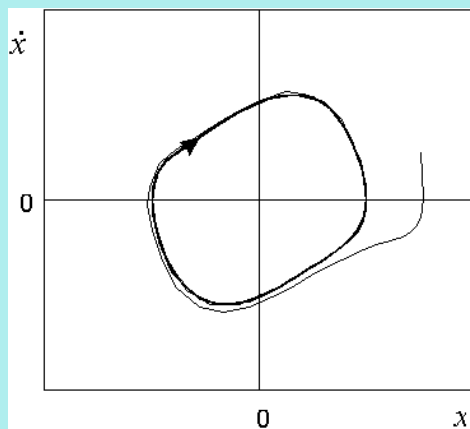


Рис. 2.7.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 26 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

2.4. Генератор релаксационных колебаний

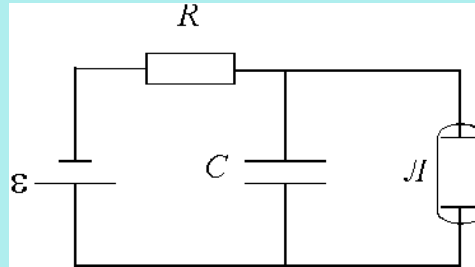


Рис. 2.8.

Релаксационные (разрывные) колебания возникают тогда, когда в системе изменения накапливаются относительно медленно, а переход в основное состояние происходит быстро, скачкообразно. Релаксационные колебания — разновидность автоколебаний. Например, они возникают в ламповом генераторе при $\mu \gg 1$ или в сифоне (Пример 3), если время истечения воды из сосуда много меньше времени заполнения сосуда.

На практике часто используют генератор релаксационных колебаний на неоновой лампе (рис. 2.8). Генератор состоит из источника питания E , резистора с большим сопротивлением R , конденсатора C , и неоновой лампы L . Неоновая лампа — нелинейный элемент. При повышении напряжения на лампе выше критического значения U_2 (напряжение зажигания), в лампе начинается газовый разряд. При уменьшении напряжения до U_1 (напряжение гашения), разряд прекращается. Схематический вид вольт-амперной характеристики неоновой лампы представлен на рис. 2.9

Поскольку сопротивление неоновой лампы r при газовом разряде мало, время разрядки конденсатора незначительно. Поскольку сопротивление резистора R велико, то велико и время зарядки конденсатора, то есть зарядка конденсатора длится много дольше разрядки, следовательно, возникающие в системе колебания являются релаксаци-

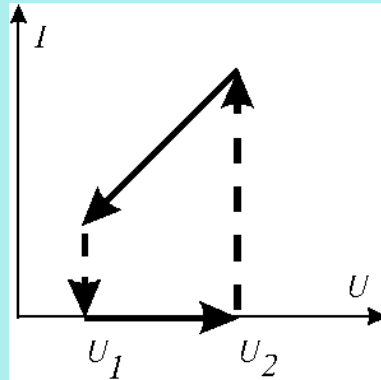


Рис. 2.9.

онными.

Напряжение на конденсаторе меняется по закону $U = \varepsilon (1 - \exp(\frac{-t}{RC}))$, при зарядке и по закону $U = U_2 \varepsilon (\frac{-t}{rC})$, при разрядке (рис. 2.10). Сила тока так же зависит от времени экспоненциально: $I = \frac{\varepsilon}{R} \exp(\frac{-t}{RC})$ — при зарядке, $I = -\frac{U_2}{r} \exp(\frac{-t}{rC})$ — при разрядке. Исключая время, находим уравнения участков фазовой траектории, соответствующих зарядке конденсатора $I = \frac{U_0 - U}{R}$ и разрядке $I = -\frac{U}{r}$. Переход между этими участками происходит скачками (рис. 2.11) реальных схемах невозможно мгновенное переключение силы тока, соответственно на графиках все углы будут сглажены.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 28 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

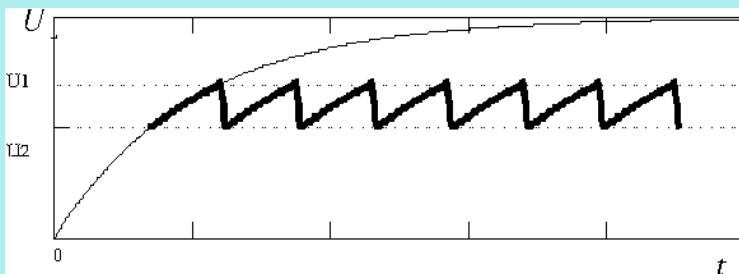


Рис. 2.10.

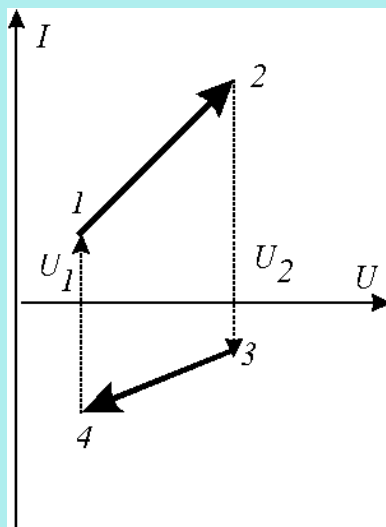


Рис. 2.11.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 29 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Глава 3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

[Home Page](#)

[Титульная страница](#)

[Содержание](#)



Страница 30 из 80

[Назад](#)

[Full Screen](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)

3.1. Введение

Давайте вспомним, как человек раскачивается на качелях. Когда качели идут вниз, человек резко приседает (центр масс системы человек-качели опускается); когда качели проходят положение равновесия, человек резко встает (центр масс системы поднимается). Если присесть, когда качели поднимаются, и встать, когда качели опускаются, то амплитуда колебаний будет уменьшаться, в конце концов качели остановятся.

Таким образом, изменение амплитуды колебаний качелей происходит не за счет внешней силы, как это бывает при резонансе, а за счет изменения параметра самой системы (в данном случае — приведенной длины).

Колебания, при которых происходит периодическое изменение какого-либо параметра колеблющейся системы, называются *параметрическими колебаниями*. Если изменение параметра системы приводит к увеличению амплитуды колебаний, то такой процесс называют *параметрическим резонансом*.

Пример 1.1. Качели.

Девочка массой $m = 40$, качается на легких качелях. Расстояние от точки подвеса качелей до центра масс девочки, когда она приседает, равно $L = 3,7$. В начальный момент времени качели выведены из положения равновесия и удерживаются в этом состоянии, так что расстояние от земли до центра масс присевшей девочки составляет $h_0 = 1,2$. Качели отпускают, и когда они проходят через нижнюю точку дуги, девочка резко встает, так что ее центр масс поднимается на $l = 0,6$. На какую высоту H от поверхности земли поднимется центр масс девочки в точке наивысшего подъема, если в нижней точке траектории расстояние от центра масс присевшей девочки до земли равно $h = 0,6$.

В соответствии с законом сохранения момента импульса в нижней точке траектории можно записать $mLv = m(L-l)v'$, откуда $v' = v \frac{L}{L-l}$, где v и v' скорости качелей до того, как девочка встала, и после того.

Заметим, что если $l \ll L$, то $v \approx v'$. Из законов сохранения энергии

$$mg(h+l) + \frac{mv'^2}{2} = mgH \text{ и } mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh, \text{ находим скорость } v = \sqrt{2g(h_0 - h)}$$

[Home Page](#)[Титульная страница](#)[Содержание](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Страница 31 из 80](#)[Назад](#)[Full Screen](#)[Закреть](#)[Выход](#)

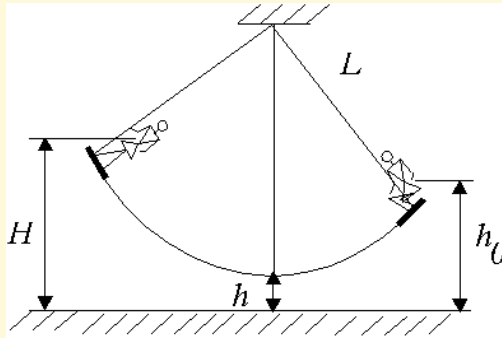


Рис. 3.1. Качели.

и высоту подъема $H = h + l + (h_0 - h) \frac{L^2}{(L-l)^2}$. Откуда $H = 2,1(\text{м})$.

Изменение энергии системы произошло за счет работы, совершаемой девочкой. Из закона изменения энергии $\frac{mv^2}{2} + mgh + A = \frac{mv^2}{2} + mg(h+l)$, следует, что $A = ml \left(\frac{2L-l}{2(L-l)^2} v^2 + g \right)$. Подставляя выражение для скорости, находим $A = mgl \left(\frac{(2L-l)(h_0-h)}{(L-l)^2} + 1 \right)$. Откуда $A=216$ (Дж)

Пример 1.2. Математический маятник.

Рассмотрим малые незатухающие колебания математического маятника переменной длины. Пусть в крайнем положении длина маятника l_{max} . Когда маятник проходит положение равновесия, его длина скачком уменьшается до l_{min} , а при достижении крайнего положения вновь увеличивается скачком до l_{max} .

Обозначим среднюю длину маятника $l = \frac{l_{max}+l_{min}}{2}$ и изменение его длины $\Delta l = \frac{l_{max}-l_{min}}{2}$. Величину $\mu = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_{max}-l_{min}}{l_{max}+l_{min}}$, называют *глубиной изменения параметра* или *глубиной модуляции параметра*. Очевидно, что $0 \leq \mu \leq 1$. В нашей задаче мы будем считать, что длина маятника меняется незначительно, то есть $\mu \ll 1$.

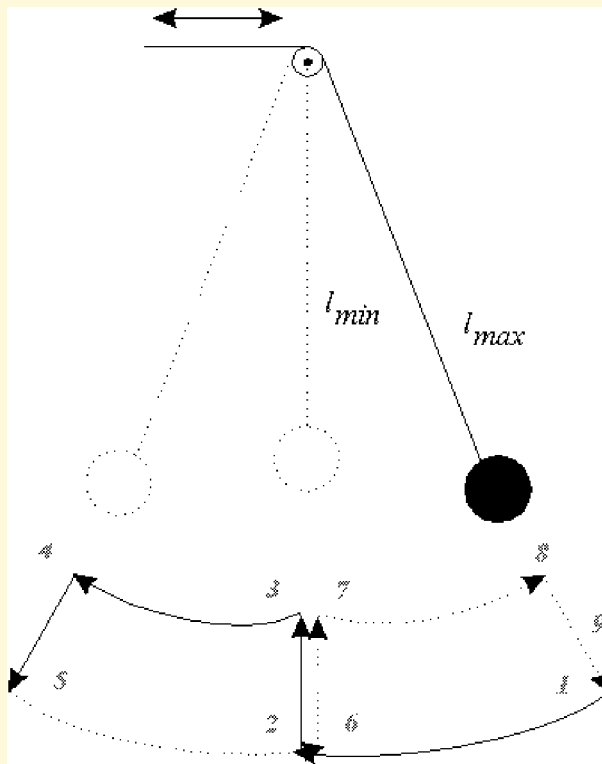


Рис. 3.2. Параметрические колебания математического маятника

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 33 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

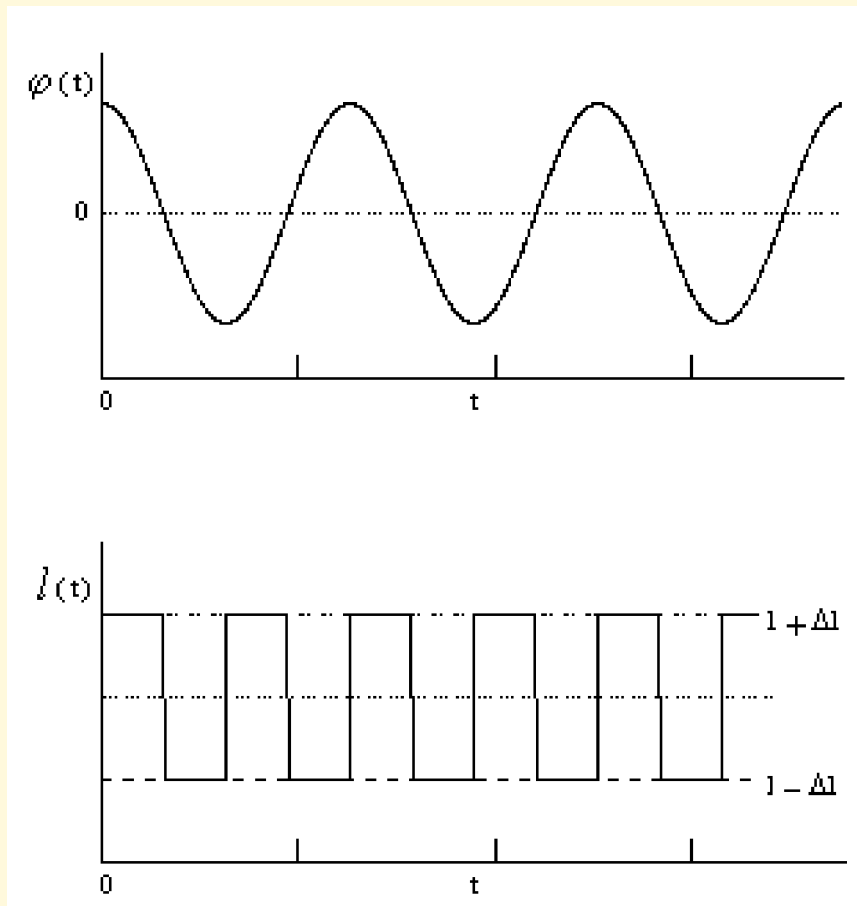


Рис. 3.3. Изменение угла отклонения математического маятника постоянной длины в зависимости от времени (вверху). Зависимость длины маятника от времени при параметрических колебаниях (внизу).

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 34 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Для того, чтобы укорачивать нить в нижней точке, необходимо совершать работу $A_1 = 2\Delta l T_1 = 2m\Delta l \left(g + \frac{v^2}{l_{\max}} \right)$, где m — масса маятника, v — его скорость в нижней точке траектории. Мы предполагаем, что в процессе укорачивания нити ее сила натяжения T_1 не меняется и может быть определена из II закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{l_{\max}} = -mg + T_1.$$

При увеличении длины нити в крайнем положении совершается работа $A_2 = -2\Delta l T_2 = -2\Delta l mg \cdot \cos \varphi \approx -2\Delta l mg \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right)$, где φ — угол отклонения маятника ($\varphi \ll 1$).

Полная работа, совершаемая внешней силой за полупериод, равна

$$A = A_1 + A_2 = 2\Delta l m \left(\frac{v^2}{l_{\max}} + \frac{g\varphi^2}{2} \right).$$

Используя закон сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgl_{\max} (1 - \cos \varphi_0) \approx mgl_{\max} \frac{\varphi_0^2}{2},$$

находим скорость $v^2 = gl_{\max} \varphi_0^2$, где φ_0 — начальное отклонение маятника.

$$A = mg\Delta l (2\varphi_0^2 + \varphi^2).$$

Учитывая малость изменения параметра, можно считать, что амплитуда колебаний меняется мало, то есть $\varphi \approx \varphi_0$. Тогда работа внешних сил (изменение энергии системы) за полупериод

$$\Delta W = A = 3\Delta l mg \varphi_0^2 = 6 \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{lmg\varphi_0^2}{2} = 6\mu W.$$

То есть изменение энергии оказывается прямо пропорционально запасенной в системе энергии, а это значит, что энергия системы растет экспоненциально. По экспоненте растет и амплитуда колебаний.

Очевидно, что добиться увеличения энергии системы можно не только меняя параметр дважды за период, но и реже, пропуская несколько периодов. (Вспомните, когда мы хотим не раскачивать качели, а просто поддерживать колебания постоянного размаха, которые убывают из-за трения, мы приседаем только один раз за несколько качаний.)

Учет затухания.

Естественно, любая реальная система имеет потери энергии из-за сил сопротивления, то есть совершает затухающие колебания.

Из добротности системы $Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\lambda}$, где λ — логарифмический декремент затухания, найдем убыль энергии системы за период: $\Delta W = 2\lambda W$.

Условием существования незатухающих параметрических колебаний является равенство убыли энергии за счет сил сопротивления и увеличения энергии за счет параметрического воздействия: $12\mu W = 2\lambda W$, откуда $\mu = \frac{\lambda}{6}$. То есть режим колебаний (стационарный, затухающий, нарастающий) при данной частоте изменения параметра определяется глубиной модуляции.

Казалось бы, если $\mu > \frac{\lambda}{6}$, то в системе энергия будет неограниченно возрастать. Однако при увеличении энергии возрастет амплитуда колебаний, условие малости колебаний перестанет выполняться, колебания станут нелинейными. Нелинейная система неизохронна, то есть период ее колебаний зависит от амплитуды, следовательно при больших колебаниях нарушится согласованность собственных колебаний системы и изменения параметра. Линейная теория не в состоянии объяснить существование устойчивых параметрических колебаний постоянной амплитуды.

Пример 1.3. Колебательный контур с переменной емкостью.

Рассмотрим идеальный колебательный контур. Пусть емкость конденсатора уменьшается скачком каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален по модулю, и увеличивается, когда заряд равен нулю. Этого можно добиться, например, раздвигая и сдвигая пластины конденсатора. В практически используемых схемам параметриче-

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 36 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

ских усилителей для этих целей применяют какой-либо нелинейный элемент, например, параметрический полупроводниковый диод.

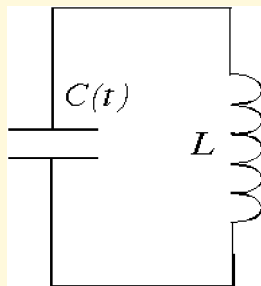


Рис. 3.4. Колебательный контур с периодически меняющейся емкостью

Когда конденсатор не заряжен, изменение его емкости не требует совершения работы. Когда конденсатор заряжен до максимального значения q_0 , изменение емкости приводит к изменению энергии

$$\Delta W = \frac{q_0^2}{2} \left(\frac{1}{C_{\min}} - \frac{1}{C_{\max}} \right) = \frac{q_0^2}{2} \left(\frac{1}{C_0 - \Delta C} - \frac{1}{C_0 + \Delta C} \right) = \frac{q_0^2}{2} \cdot \frac{2\Delta C}{C_0^2 - \Delta C^2}.$$

Если $\Delta C \ll C_0$, то есть глубина изменения параметра мала, то

$$\Delta W = \frac{q_0^2}{2C_0} \cdot 2 \frac{\Delta C}{C_0} = 2W\mu.$$

Таким образом, как и в случае механических колебаний энергия системы растет пропорционально запасенной энергии, то есть экспоненциально.

Аналогично можно найти изменение энергии контура при скачкообразном изменении индуктивности.

3.2. Математический маятник. Общий случай изменения параметра

Рассмотрим параметрические колебания математического маятника в общем случае, то есть при произвольном характере изменения параметра и больших колебаниях при наличии вязкого трения. Уравнение движения маятника — уравнение динамики вращательного движения $\frac{dL}{dt} = M$. Момент импульса $L = I\omega = ml^2\dot{\varphi}$. На систему действует два момента сил: момент силы тяжести $-mgl \sin \varphi$ и момент силы трения $-rvl = -rl^2\dot{\varphi}$, где r — коэффициент трения. Тогда уравнение движения принимает вид

$$ml^2\ddot{\varphi} + 2ml\dot{l}\dot{\varphi} + rl^2\dot{\varphi} + lmg \sin \varphi = 0.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка описывает самый общий случай параметрических колебаний. К сожалению, при произвольном законе изменения параметра, уравнение, вообще говоря, может быть решено только численно. В случае малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$) заменой переменных $\varphi = \frac{u}{le^{\beta t}}$, где $\beta = \frac{r}{2m}$, уравнение приводится к виду

$$\ddot{u} + \Phi(t)u = 0, \quad (3.1)$$

где $\Phi(t) = \omega^2(t) - \frac{\ddot{l}(t)}{l(t)} + 2\beta\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} - \beta^2$ и $\omega^2(t) = \frac{g}{l(t)}$.

Уравнение (3.1) — дифференциальное уравнение II порядка с периодическим коэффициентом $\Phi(t)$ называется *уравнением Хилла*.

В частном случае, если $l(t) = l_0(1 + \mu \cos \omega_p t)$, где $\mu \ll 1$, то $\omega^2(t) \approx \frac{g}{l_0}(1 - \mu \cos \omega_p t) = \omega_0^2(1 - \mu \cos \omega_p t)$ и уравнение Хилла можно преобразовать к *уравнению Матье*

$$\ddot{u} + \omega_0^2(1 + m \cos \omega_p t)u = 0. \quad (3.2)$$

Считая, что затухание отсутствует, $\omega = \omega_0$ и $m = \mu \left(\left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right)$.

3.3. Элементы математической теории

В теории дифференциальных уравнений доказывается (*теорема Флоке*), что решение уравнения Хилла, а, следовательно, и уравнения Матьё, имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t} \chi(t) + C_2 e^{-\lambda t} \chi(-t), \quad (3.3)$$

где λ — ляпуновский показатель, $\chi(t)$ — ограниченная периодическая функция с периодом, равным периоду изменения параметра.

В случае уравнения Матьё функции $\chi(t)$ — функции Матьё. Это специальные функции, получить которые в виде ряда можно, если искать решение уравнения Матьё в виде ряда Фурье. Функции Матьё протабулированы и их свойства известны.

Ляпуновский показатель λ , вообще говоря, комплексный. Если $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, то одно излагаемых будет возрастать — в системе возникнет нарастание колебаний.

Анализ устойчивости решения уравнения Матьё можно провести, используя, например, методы теории возмущений. Результаты анализа показывают, что резонанс наступает не только при точном выполнении равенства $\omega_p = \frac{2\omega_0}{n}$, где n — целое число, но и в некоторой области частот.

Результаты расчета зон устойчивости представлены на рис. 3.5 Заштрихованные зоны соответствуют областям параметрического резонанса. При увеличении глубины модуляции ширина зон увеличивается. Уменьшение частоты изменения параметра, то есть более редкое введение энергии в систему, приводит к уменьшению ширины зон. Ширина зон пропорциональна m^n , где n — номер зоны. Учет затухания приводит к тому, что резонанс становится возможным не при сколь угодно малой глубине изменения параметра, а при конечных значениях.

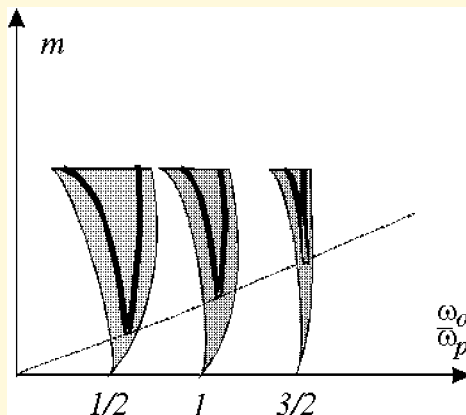


Рис. 3.5.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 40 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Глава 4

СВЯЗАННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 41 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

4.1. Системы, состоящие из двух связанных осцилляторов

4.1.1. Простейшие примеры

Пример 1.1. Механические колебания.

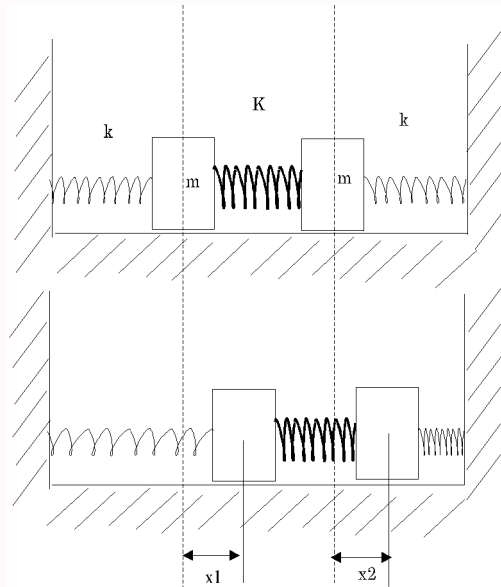


Рис. 4.1.

Рассмотрим систему, представленную на рис. 4.1. Два бруска одинаковой массы m

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 42 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

могут скользить без трения по горизонтальной поверхности. Грузы связаны между собой пружиной жесткости K и со стенками пружинами жесткости k . Смещение левого груза из положения равновесия обозначим x_1 , а второго — x_2 . Будем считать, что пружины подчиняются закону Гука, и запишем уравнения движения грузов

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - K(x_1 - x_2), \quad (4.1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1). \quad (4.2)$$

Преобразуем систему, складывая (4.1) и (4.2) и вычитая (4.2) из (4.1),

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\omega^2(x_1 + x_2), \quad (4.3)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\omega^2(x_1 - x_2) - 2\Omega^2(x_1 - x_2), \quad (4.4)$$

где для упрощения записи введены обозначения

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{и} \quad \Omega^2 = \frac{K}{m}. \quad (4.5)$$

Пусть

$$\xi_1 = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{(x_1 - x_2)}{2}. \quad (4.6)$$

Тогда система уравнений (4.3 — 4.4) преобразуется к виду

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2\xi_1 = 0, \quad (4.7)$$

$$\ddot{\xi}_2 + (\omega^2 + 2\Omega^2)\xi_2 = 0. \quad (4.8)$$

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 43 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Уравнения (4.7 — 4.8) — дифференциальные уравнения, описывающие колебания гармонического осциллятора. Их решения хорошо известны

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (4.9)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t + \varphi_2), \quad (4.10)$$

где параметры $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2$ определяются начальными условиями. Используя определения (4.6), из уравнений (4.9 — 4.10) найдем x_1 и x_2 .

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t + \varphi_2), \quad (4.11)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - A_2 \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t + \varphi_2). \quad (4.12)$$

Таким образом, колебания грузов представляют суперпозицию колебаний с частотами ω и $\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$, которые называют *нормальными частотами* или *нормальными модами* системы. При определенном выборе начальных условий оба груза будут совершать колебания с одинаковой частотой, соответствующей одной из нормальных мод.

Пусть оба груза в начальный момент времени смещены вправо на одинаковое расстояние и отпущены без толчка. Тогда центральная пружина окажется недеформированной и не будет оказывать влияние на движение грузов. Оба груза будут совершать синфазные колебания с частотой ω . Иными словами, можно сказать, что центр масс системы колеблется с фиксированной частотой ω при этом расстояние между телами не меняется. Обратите внимание, что координата центра масс определяется переменной (4).

Пусть теперь оба груза в начальный момент времени отведены в разные стороны на одинаковые расстояния из положения равновесия и отпущены без толчка. В этом случае центр масс будет оставаться неподвижным в силу симметрии системы и начальных условий, а грузы будут колебаться в противофазе. При этом расстояние между грузами $2\xi_2$ меняется по закону (4.10) с частотой $\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$.



Таким образом, переменные ξ_1 и ξ_2 описывают колебания всей системы как единого целого с нормальными частотами. Переменные ξ_1 и ξ_2 называют *нормальными координатами*.

Пример 1.2. Связанные колебательные контуры. Емкостная связь.

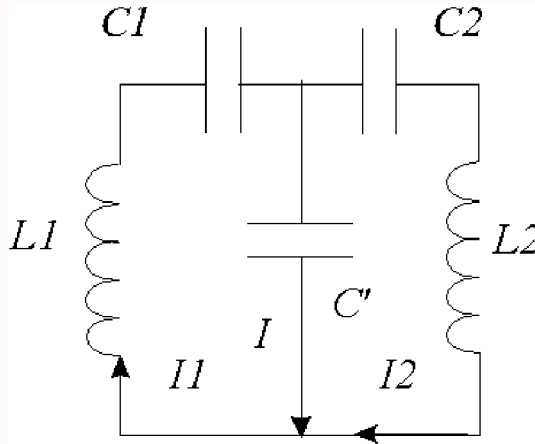


Рис. 4.2.

Рассмотрим представленную на рис. 4.2 систему двух колебательных контуров, состоящих из одинаковых конденсаторов с емкостями $C_1 = C_2 = C$ и катушек с индуктивностями $L_1 = L_2 = L$, связанных через емкость C' . Мгновенные значения сил токов I_1, I_2, I , их направления указаны на схеме.

Запишем правила Кирхгофа для левого и правого контуров, выбирая направления обхода контуров по часовой стрелке.

$$I_1 - I_2 - I = 0, \quad (4.13)$$

$$U_{C'} + U_{C_1} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad (4.14)$$

$$-U_{C'} + U_{C_2} = -L \frac{dI_2}{dt}. \quad (4.15)$$

Интегрируя уравнение (4.13), находим

$$q_1 - q_2 - q = 0. \quad (4.16)$$

Постоянная интегрирования, соответствует независящему от времени заряду и не имеет отношения к колебаниям, поэтому мы положили ее равной нулю. С учетом того, что $U_{C'} = \frac{q}{C'}$, $U_{C_1} = \frac{q_1}{C}$, $U_{C_2} = \frac{q_2}{C}$ и соотношения (4.16), уравнения (4.14 — 4.15) преобразуются к виду

$$\frac{q_1 - q_2}{C'} + \frac{q_1}{C} = -L\ddot{q}_1, \quad (4.17)$$

$$-\frac{q_1 - q_2}{C'} + \frac{q_2}{C} = -L\ddot{q}_2. \quad (4.18)$$

Преобразуем полученную систему, складывая и вычитая уравнения (4.17) и (4.18).

$$\frac{1}{C}(q_1 + q_2) = -L(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2), \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C'}\right)(q_1 - q_2) = -L(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2). \quad (4.20)$$

Введем новые переменные

$$\xi_1 = q_1 + q_2 \quad \text{и} \quad \xi_2 = q_1 - q_2. \quad (4.21)$$

Тогда система (4.19 — 4.20) принимает вид

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$\ddot{\xi}_2 + (\omega^2 + 2\Omega^2)\xi_2 = 0, \quad (4.23)$$

где введены обозначения $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, $\Omega^2 = \frac{1}{LC'}$.

Мы пришли к уравнениям, совершенно аналогичным уравнениям (4.7 — 4.8). То есть переменные ξ_1 и ξ_2 являются нормальными координатами, а ω и $\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$ — нормальными модами. Переменная ξ_1 и частота ω соответствуют ситуации, когда конденсатор C' все время остается незаряженным (либо имеет постоянный заряд), а направления токов I_1 и I_2 совпадают. Переменная ξ_2 и частота $\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$ соответствуют противоположно направленным токам I_1 и I_2 . Конденсатор C' при этом периодически перезаряжается.

Пример 1.3. Электромагнитные колебания. Индуктивная связь.

Рассмотрим два одинаковых колебательных контура с конденсаторами емкости $C_1 = C_2 = C$ и катушек с индуктивностями $L_1 = L_2 = L$. Контурь связаны между собой индуктивной связью с коэффициентом взаимной индукции M . Пусть в контурах текут токи I_1 и I_2 в направлениях, указанных на рис. 4.3

Запишем правила Кирхгофа, обходя контуры по часовой стрелке.

$$U_{C_1} = -L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}, \quad (4.24)$$

$$U_{C_2} = -L \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.25)$$

С учетом того, что

$$U_{C_1} = \frac{q_1}{C} \quad \text{и} \quad U_{C_2} = \frac{q_2}{C}, \quad (4.26)$$

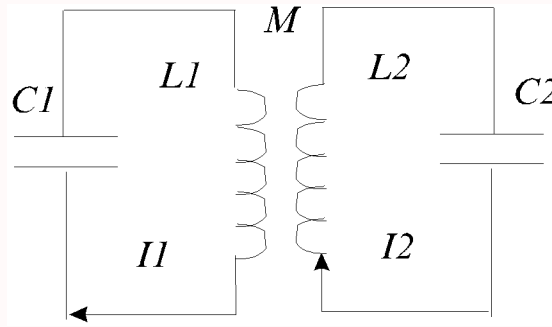


Рис. 4.3.

уравнения (4.24 —4.25) преобразуются к виду

$$\frac{q_1}{C} = -L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2, \quad (4.27)$$

$$\frac{q_2}{C} = -L\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1. \quad (4.28)$$

Преобразуем полученную систему, складывая и вычитая ее уравнения.

$$\frac{1}{C}(q_1 + q_2) = (M - L)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2), \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{C}(q_1 - q_2) = (-M - L)(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2). \quad (4.30)$$

Введем новые переменные

$$\xi_1 = q_1 + q_2 \quad \text{и} \quad \xi_2 = q_1 - q_2, \quad (4.31)$$

и обозначим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{C(L - M)} \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{C(L + M)}. \quad (4.32)$$

Тогда система (4.29 — 4.30) примет вид

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = 0, \quad (4.33)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = 0. \quad (4.34)$$

Переменные ξ_1 и ξ_2 являются нормальными координатами, а частоты ω_1 и ω_2 — нормальными модами системы. Нормальные колебания соответствуют ситуации, когда токи в контурах в любой момент времени одинаковы по величине и направлены либо в одну сторону (колебания с частотой ω_1), либо в разные стороны (колебания с частотой ω_2).

Вопрос 1. Хорошо известно, что между механическими и электромагнитными колебаниями имеется прямая аналогия. Формальная замена превращает уравнения электромагнитных колебаний в уравнения механических колебаний и наоборот. Какой электрической схеме соответствует система на рис. 4.1? Каким механическим системам соответствуют схемы на рис. 4.2 и рис. 4.3?

4.1.2. Общий метод нахождения нормальных координат и нормальных мод

В рассмотренных выше примерах задача нахождения нормальных координат и нормальных мод оказалась достаточно простой. Симметрия рассматриваемых систем позволила угадать характер нормальных колебаний, а переход к новым переменным — нормальным координатам — был очевиден. Однако, для произвольных систем, не обладающих симметрией, интуитивный подход оказывается неэффективным.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Страница 49 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход



Общий математический метод нахождения нормальных мод и нормальных координат опробуем на системе, состоящей из двух одинаковых математических маятников, связанных пружиной жесткости k . Маятники представляют собой невесомые жесткие стержни длиной l , на концах которых закреплены точечные массы m . Пружина закреплена на расстоянии l_0 от точки подвеса. Будем считать, что тела совершают малые колебания под действием силы тяжести, силы упругости и силы напряжения стержня. Запишем уравнения динамики вращательного движения для левого и правого тела¹.

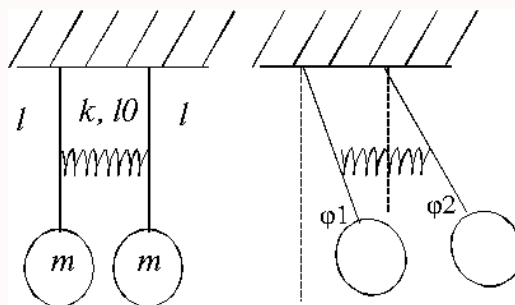


Рис. 4.4.

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 = -mgl\varphi_1 - kl_0^2(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (4.35)$$

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 = -mgl\varphi_2 + kl_0^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.36)$$

Будем считать, что оба тела совершают колебания с одной и той же частотой —

¹ Наиболее эффективным был бы метод с использованием функции Лагранжа, однако, в рамках курса физики в техническом вузе он не изучается.

нормальные колебания. Тогда решение системы (4.35 —4.36) следует искать в виде

$$\varphi_1 = A \exp(i\omega_0 t) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = B \exp(i\omega_0 t). \quad (4.37)$$

Введем обозначения

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{и} \quad \Omega^2 = \frac{kl_0^2}{ml^2}. \quad (4.38)$$

Подставив (4.37) в систему (4.35 —4.36), получаем систему характеристических уравнений

$$A(\Omega^2 + \omega^2 - \omega_0^2) - B\Omega^2 = 0, \quad (4.39)$$

$$-A\Omega^2 + B(\Omega^2 + \omega^2 - \omega_0^2) = 0. \quad (4.40)$$

Система имеет нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 + \omega^2 - \omega_0^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \Omega^2 + \omega^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.41)$$

Откуда

$$\omega_{01}^2 = \omega^2 \quad \text{либо} \quad \omega_{02}^2 = \omega^2 + 2\Omega^2. \quad (4.42)$$

Частоте ω_{01} соответствует соотношение $A = B$, а частоте ω_{02} — $A = -B$. Поскольку один из коэффициентов может выбираться произвольно, будем полагать, что $A = 1$. Общее решение системы (4.39 —4.40) является суммой его частных решений

$$\varphi_1^{(1)} = C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t) = \varphi_m^{(1)} \cos(\omega t + \alpha^{(1)}), \quad (4.43)$$

$$\varphi_2^{(1)} = C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t) = \varphi_m^{(1)} \cos(\omega t + \alpha^{(1)}), \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= C_1 \exp(i\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t) + C_2 \exp(-i\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t) = \\ &= \varphi_m^{(1)} \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t + \alpha_1^{(2)}),\end{aligned}\quad (4.45)$$

$$\varphi_2^{(2)} = -\varphi_1^{(2)} = -\varphi_m^{(1)} \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}t + \alpha_1^{(2)}). \quad (4.46)$$

Рассмотренный метод позволяет находить нормальные моды систем любой сложности.

Задание 1. Найти собственные частоты для системы, представленной на рис. 4.4, но состоящей из математических маятников различной длины с грузами различной массы.

4.1.3. Случай слабой связи

Будем рассматривать систему из Примера 1. Пусть связь между телами слабая, то есть

$$\Omega^2 \ll \omega^2 \quad (4.47)$$

Тогда колебания системы будут представлять суперпозицию двух колебаний с близкими частотами — в системе возникнут биения. Для простоты будем полагать, что амплитуды A_1 и A_2 одинаковы, а начальные фазы равны нулю

$$A_1 = A_2 = A; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \quad (4.48)$$

С учетом (4.47) можно записать

$$\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2} \approx \omega + \frac{\Omega^2}{\omega}. \quad (4.49)$$

Тогда

$$x_1 = A(\cos \omega t + \cos(\omega + \frac{\Omega^2}{\omega})t), \quad (4.50)$$



$$x_2 = A(\cos \omega t - \cos \left(\omega + \frac{\Omega^2}{\omega} \right) t). \quad (4.51)$$

Введем обозначения

$$\langle \omega \rangle = \omega + \frac{\Omega^2}{2\omega}; \quad \omega_6 = \frac{\Omega^2}{2\omega}. \quad (4.52)$$

Тогда

$$x_1 = 2A \cos \langle \omega \rangle t \cdot \cos \omega_6 t, \quad (4.53)$$

$$x_2 = 2A \sin \langle \omega \rangle t \cdot \sin \omega_6 t. \quad (4.54)$$

То есть грузы совершают колебания со средней частотой $\langle \omega \rangle$, при этом амплитуда колебаний медленно меняется по гармоническому закону с частотой ω_6 (см. рис. 4.5, 4.6).

4.1.4. Вынужденные колебания связанных осцилляторов

Рассмотрим поведение системы, изображенной на рис. 4.1, под действием периодической силы

$$F(t) = F_0 \cos \tilde{\omega} t, \quad (4.55)$$

приложенной к левому бруску. Тогда уравнение движения для левого тела имеет вид

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - K(x_1 - x_2) + F_0 \cos \tilde{\omega} t, \quad (4.56)$$

а уравнение движения второго тела совпадает с (4.2). После преобразования получаем

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = f_0 \cos \tilde{\omega} t, \quad (4.57)$$

$$\ddot{\xi}_2 + (\omega^2 + 2\Omega^2) \xi_2 = f_0 \cos \tilde{\omega} t, \quad (4.58)$$

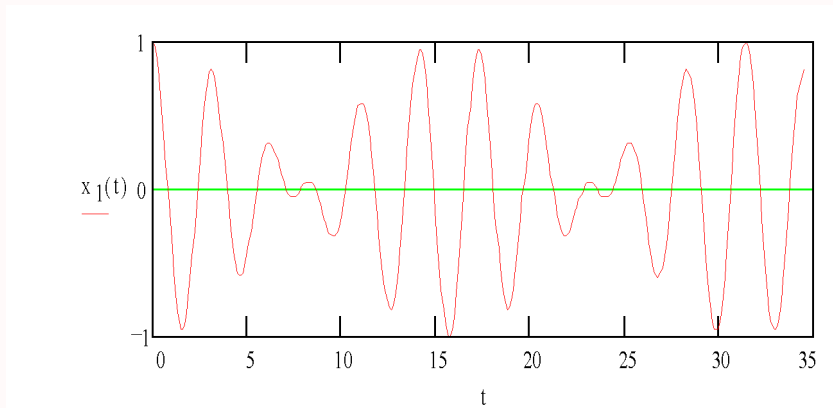


Рис. 4.5.

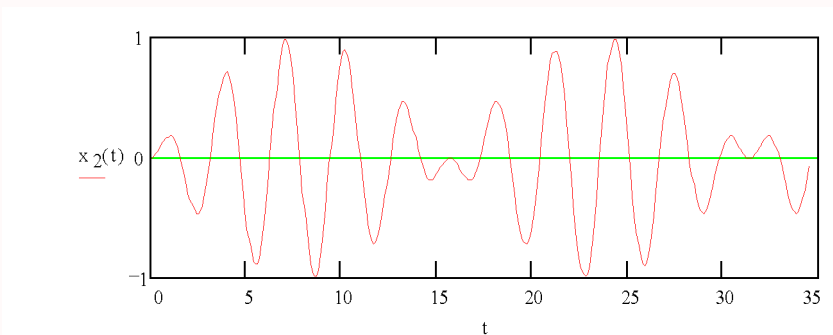


Рис. 4.6.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 54 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

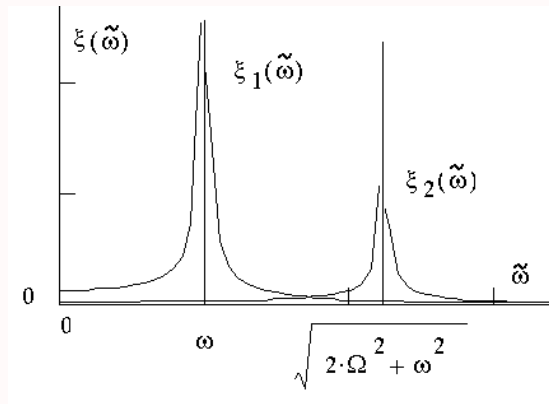


Рис. 4.7.

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$, а остальные обозначения совпадают с обозначения п.1.1.1. Система (4.57 — 4.58) представляет два независимых уравнения вынужденных колебаний. Их решения известны — это суперпозиция гармонических колебаний с собственной частотой и колебаний с частотой вынуждающей силы. При совпадении частоты собственных колебаний и частоты вынуждающей силы произойдет резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний — резонанс. Поскольку переменные ξ_1 и ξ_2 — линейные комбинации смещений x_1 и x_2 (см. (4.10)), то резонанс в системе будет наблюдаться при двух частотах, соответствующих нормальным модам.

На рис. 4.7 показаны резонансные кривые для нормальных координат, а на рис. 4.8 и рис. 4.9 — для координат x_1 и x_2 . По вертикальной оси отложены амплитуды.

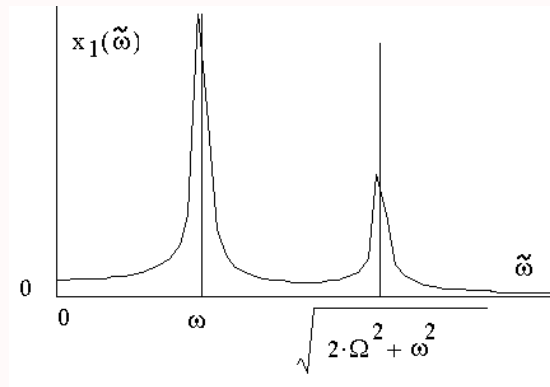


Рис. 4.8.

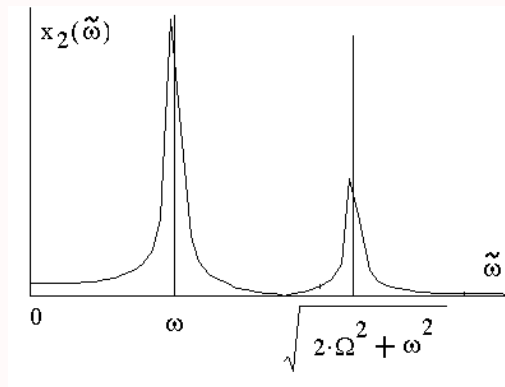


Рис. 4.9.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 56 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

4.2. Системы N связанных осцилляторов

4.2.1. Постановка задачи

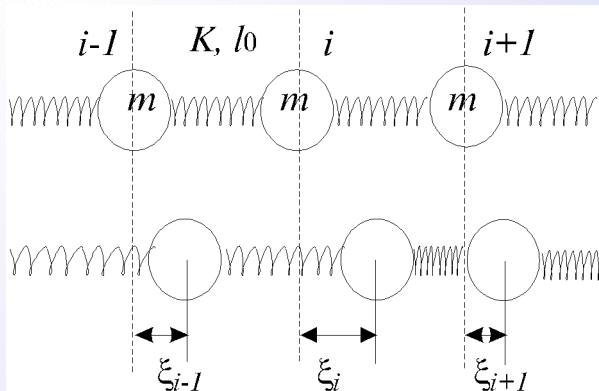


Рис. 4.10.

Будем рассматривать цепочку одинаковых тел массой m , связанных между собой пружинами жесткости k (рис. 4.10). Длина пружины в недеформированном состоянии l_0 . Смещение i -го тела из положения равновесия ξ_i .

Запишем уравнение движения i -го тела.

$$m\ddot{\xi}_i = -K(\xi_i - \xi_{i-1}) - K(\xi_i - \xi_{i+1}). \quad (4.59)$$

Обозначим

$$\omega^2 = \frac{K}{m}. \quad (4.60)$$

Тогда

$$\ddot{\xi}_i = \omega^2(-2\xi_i + \xi_{i-1} + \xi_{i+1}). \quad (4.61)$$

Необходимо выписать N таких уравнений для каждого тела, а также задать граничные условия на концах цепочки, тогда, решив полученную систему, можно найти смещение любого тела в любой момент времени.

Подобная цепочка может служить, в частности, моделью твердого тела. Тела соответствуют атомам, пружины — связи между атомами. При небольших смещениях атомов в твердом теле из положения равновесия с достаточной точностью можно считать, что силы, действующие на атомы, квазиупругие. Таким образом, задача о цепочке связанных осцилляторов может иметь приложение к динамике кристаллической решетки твердого тела.

В электротехнике цепочки связанных колебательных контуров используют в качестве фильтров.

4.2.2. Длинноволновое приближение

Будем считать, что смещения тел из положения равновесия малы по сравнению с расстоянием между телами

$$\xi_i \ll l_0 \quad \text{для любого } i. \quad (4.62)$$

Тогда

$$\frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{l_0} \approx \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{l_0} \approx \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=il_0}, \quad (4.63)$$

$$\frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{l_0^2} \approx \left. \frac{d^2\xi}{dx^2} \right|_{x=il_0}, \quad (4.64)$$

и уравнение (4.61) запишется в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}, \quad (4.65)$$

где $v = \omega l_0$, то есть мы перешли от дискретного набора тел к непрерывному распределению — *континуальное приближение*.

Для упругого тела связь между коэффициентом жесткости и параметрами тела определяется выражением

$$K = E \frac{S}{l_0}. \quad (4.66)$$

Преобразуем выражение для v^2

$$v^2 = \omega^2 l_0^2 = \frac{K}{m} l_0^2 = \frac{ESl_0^2}{\rho S l_0^2} = \frac{E}{\rho}, \quad (4.67)$$

где ρ — плотность тела.

Уравнение (4.64) — это одномерное *волновое уравнение*. В нашем случае оно описывает распространение в цепочке упругой продольной волны со скоростью v . Уравнения вида (4.64) встречаются при решении самых разных физических задач в механике, электродинамике, оптике и т. д.

Можно убедиться прямой подстановкой, что любая функция вида

$$\xi(x, t) = \xi \left(t \pm \frac{x}{v} \right), \quad (4.68)$$

является решением волнового уравнения. В частности, решением является гармоническая волна

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega_0 t - kx + \varphi_0), \quad (4.69)$$

где ω_0 — циклическая частота волны, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны, $\omega_0 t - kx + \varphi_0$ — фаза волны.

Скорость распространения фазы — фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega_0}{k} = v. \quad (4.70)$$

Решение (4.68) является наиболее общим и не учитывает информации о граничных условиях. Будем считать, что края нашей цепочки жестко закреплены, то есть

$$\xi_1 = \xi_N = 0 \quad \text{или} \quad \xi(0, t) = \xi(Nl_0, t) = 0. \quad (4.71)$$

Поскольку условие (4.70) выполняется в любой момент времени, в том числе, и при $t = 0$, то $\varphi_0 = 0$

$$A \sin(\omega_0 t - k \cdot 0) = A \sin \omega_0 t = 0, \quad (4.72)$$

$$A \sin(\omega_0 t - kNl_0) = 0. \quad (4.73)$$

следовательно,

$$\omega_0 t = \pi p, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.74)$$

$$\omega_0 t - kNl_0 = \pi m, \quad \text{где} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.75)$$

Вычитая из (4.74) (4.75), имеем $kNl_0 = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, или

$$k = \frac{\pi}{Nl_0} n, \quad \lambda = \frac{2Nl_0}{s}, \quad s = \pm 1, \pm 2, \dots, N. \quad (4.76)$$

Таким образом, в цепочке могут распространяться только волны с длиной волны, удовлетворяющей соотношению (4.76).

Рассмотренное приближение является хорошей моделью для описания упругих волн в стержнях, струнах, жидкости и газе, когда реальная атомная структура вещества не играет заметной роли в распространении волны.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 60 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

4.2.3. Точное решение

Попытаемся угадать вид точного решения уравнения (4.61), исходя из того, что в пределе (4.62) точное решение должно перейти в (4.69). Заменяем x на il_0

$$\xi_i(t) = A \sin(\omega_0 t - kil_0 + \varphi_0), \quad (4.77)$$

и проверим, является ли (4.77) решением (4.61)

$$\ddot{\xi}_i(t) = -\omega_0^2 \xi_i(t), \quad (4.78)$$

$$\xi_{i+1}(t) - 2\xi_i(t) + \xi_{i-1}(t) = -4 \sin^2 \frac{kl_0}{2} \xi_i(t). \quad (4.79)$$

Уравнение (4.79) проще всего получить, записав (4.77) в экспоненциальной форме. Таким образом, (4.77) является решением (4.61) только, если выполняется соотношение

$$\omega_0 = 2\omega \sin \frac{kl_0}{2} = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin \frac{kl_0}{2}. \quad (4.80)$$

Выражение (4.80), показывающее зависимость частоты волны от ее волнового числа, называется *дисперсионным соотношением*.

В случае длинных волн $k \rightarrow 0$ и (4.80) можно записать в виде

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot \frac{kl_0}{2} = kv, \quad (4.81)$$

то есть закон дисперсии линеен в соответствии с формулой (4.70).

Сплошной линией на рис. 4.11 показан точный закон дисперсии (4.81), пунктирной — закон дисперсии в длинноволновом приближении.

Учет дискретной структуры цепочки привел к важному следствию — наличию предельной частоты (минимальной длины волны). Естественно, бессмысленно говорить,

например, о волне в четверть расстояния между звеньями, так как ей не может соответствовать никакой реальный процесс.

$$\lambda_{min} = 2l_0 \quad (4.82)$$

При выводе дисперсионного соотношения мы не учитывали граничные условия, полагая цепочку бесконечной. Наложение граничных условий приведет к тому, что разрешенными окажутся только N частот — нормальных мод.

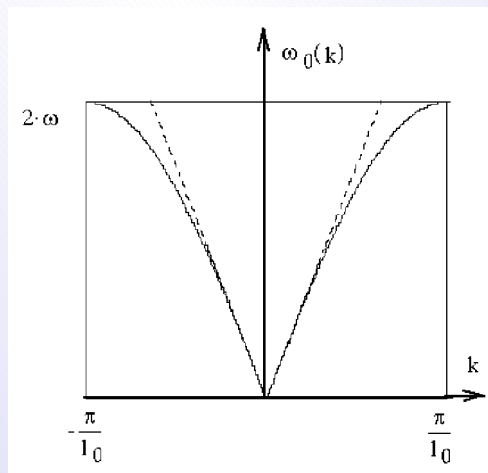


Рис. 4.11.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 62 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

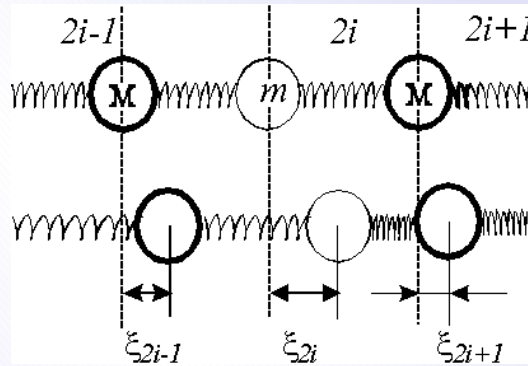


Рис. 4.12.

4.2.4. Цепочка из различных звеньев

Пусть цепочка состоит из чередующихся тел массой m в узлах с четными номерами ($2i$) и M в узлах с нечетными номерами ($2i + 1$). Тела соединены пружинами жесткости K (см. рис. 4.12).

Тогда уравнение движения $2i$ -го и $2i + 1$ -го тела имеют вид

$$m\ddot{\xi}_{2i} = -K(2\xi_{2i} - \xi_{2i+1} - \xi_{2i-1}), \quad (4.83)$$

$$M\ddot{\xi}_{2i+1} = -K(2\xi_{2i+1} - \xi_{2i+2} - \xi_{2i}). \quad (4.84)$$

Воспользуемся общим методом для нахождения нормальных мод, и будем искать решение в виде

$$\xi_{2i} = A \exp [j(\omega_0 t - 2ikl_0)], \quad (4.85)$$

$$\xi_{2i+1} = B \exp [j(\omega_0 t - (2i + 1)kl_0)], \quad (4.86)$$

где j — мнимая единица.

Подстановка (4.85-4.86) в (4.83-4.84) дает следующее условие для нахождения нормальных мод ω_0

$$\begin{vmatrix} 2K - m\omega_0^2 & -2K \cos kl_0 \\ -2K \cos kl_0 & 2K - M\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.87)$$

Таким образом

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(\omega^2 + \Omega^2)^2 - 4\omega^2\Omega^2 \sin^2 kl_0}, \quad (4.88)$$

где обозначено $\omega^2 = \frac{K}{m}$, $\Omega^2 = \frac{K}{M}$

Знак минус соответствует меньшим частотам. Эта ветка в законе дисперсии называется *акустической модой*. Знак плюс соответствует колебаниям с большей частотой, эта ветвь в законе дисперсии носит название *оптической моды*. Названия мод объясняются тем, что в случае твердого тела им соответствуют колебания с оптическими и акустическими частотами. Две ветви в законе дисперсии разделены *запрещенной щелью* (рис. 4.13). В случае равенства масс ($m = M$) закон дисперсии (4.88) переходит в (4.80).

4.2.5. Домашний эксперимент

Для наблюдения колебаний связанных осцилляторов не требуется сложное оборудование. Для проведения опыта достаточно запастись веревкой и двумя грузами, например, тяжелыми гайками. Натяните горизонтально веревку, например, между спинками двух стульев, привяжите вблизи середины веревки на небольшом расстоянии друг от друга гайки на веревках, которые будут играть роль маятников. Связь между маятниками осуществляется благодаря упругости горизонтальной веревки.

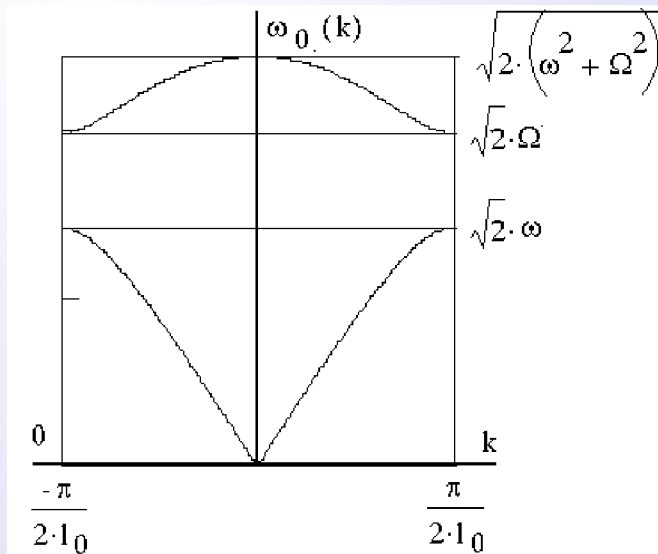


Рис. 4.13.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀ ▶

◀ ▶

Страница 65 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Задание 1. Наблюдение нормальных колебаний.

Отклоните оба груза на одинаковое расстояние в одну сторону и отпустите их. Если длина наших маятников одинакова, маятники будут колебаться синфазно. Однако, скорее всего, длины маятников немного отличаются друг от друга, поэтому постепенно произойдет расстройка колебаний. Попробуйте добиться синфазности колебаний, регулируя длину подвесов.

Повторите опыт, отклоняя грузы в разные стороны на одинаковое расстояние.

Задание 2. Наблюдение биений.

Отклоните из положения равновесия один груз и отпустите его. Наблюдайте, как амплитуда колебаний груза уменьшается вплоть до полной остановки груза, в то время как амплитуда колебаний второго груза возрастает.

Задание 3. Нормальные колебания в системе из трех маятников.

Подумайте, как выглядят нормальные колебания в системе из трех маятников. Понаблюдайте за ними, задавая соответствующие начальные условия.

Задание 4. Биения в системе из трех маятников.

Понаблюдайте, как передается энергия от одного маятника к другому, если первоначально из положения равновесия был выведен только один крайний маятник.

Задание 5. Система многих маятников.

Подумайте, что произойдет, если система будет состоять из множества одинаковых маятников? Проведите эксперимент, увеличив число маятников на сколько это возможно. Отклоните крайний маятник из положения равновесия и наблюдайте процесс передачи колебаний от одного маятника к другому.

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 66 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

Глава 5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Страница 67 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

5.1. Введение

Наиболее известными и хорошо исследованными нелинейными уравнениями математической физики являются уравнения, описывающие распространение волн в нелинейных средах. Решениями таких уравнений могут быть ударные волны или солитоны — уединенные волны, обладающие свойствами частиц. При столкновении солитоны взаимодействуют упруго, подобно частицам. К одномерным солитонам относятся уединенные волны в жидкости (например, цунами), доменные стенки в антиферро- и ферромагнетиках, оптические солитоны, кванты магнитного потока в контактах Джозефсона и т.д. Двумерными солитонами являются дислокации в кристаллической решетке, магнитные трубки (вихри Абрикосова) в сверхпроводниках II рода, антициклоны (в частности „Большое красное пятно“ на Юпитере) и т.д. К трехмерным и многомерным солитонам относятся некоторые модели астрофизики и физики элементарных частиц (черные дыры, инстантоны, скирмионы).

- Уравнение Буссинеска: $u_{tt} - c^2 u_{xx} - \left(\frac{u^2}{2}\right)_{xx} - \beta u_{xxxx} = 0$.
- Уравнение Кортевега–де Фриза: $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$.
- Уравнение синус-Гордона: $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0$.
- Нелинейное уравнение Шредингера: $iu_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0$.

Home Page

Титульная страница

Содержание

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Страница 68 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход



5.2. Вывод уравнения \sin -Гордона

Покажем на простейшем примере, как появляются нелинейные уравнения математической физике.

Рассмотрим цепочку одинаковых маятников, нанизанных на струну и связанных пружинкам (рис. 5.1).

Будем обозначать массу маятника m , его момент инерции — I , длину — l , постоянную кручения пружин — κ , расстояние между маятниками (длину пружин) — d . При отклонении i -го маятника из положения равновесия на угол φ_i на маятник действует момент силы тяжести $M_g = -mgl \sin \varphi_i$ и момент силы кручения со стороны соседних пружин $M_{i,i+1} = -\kappa(\varphi_i - \varphi_{i+1})$ и $M_{i-1,i} = -\kappa(\varphi_i - \varphi_{i-1})$. Уравнение движения маятника имеет вид

$$I \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = -mgl \sin \varphi_i - \kappa(\varphi_i - \varphi_{i+1}) - \kappa(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \\ = -mgl \sin \varphi_i + \kappa(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}). \quad (5.1)$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, \quad c^2 = \frac{d^2 \kappa}{I},$$

тогда

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} - c^2 \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{d^2} + \omega_0^2 \sin \varphi_i = 0. \quad (5.2)$$

Если вывести один из маятников из положения равновесия, то он начнет совершать колебания. Благодаря наличию упругой связи между маятниками (пружины), эти колебания передадутся соседним маятникам — по цепочке начнет распространяться волна. Будем полагать, что длина волны много больше расстояния между маятниками ($\lambda \gg d$). Тогда можно ввести функцию $\varphi(x, t)$, описывающую эту волну, и сделать замену

$$\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{d^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

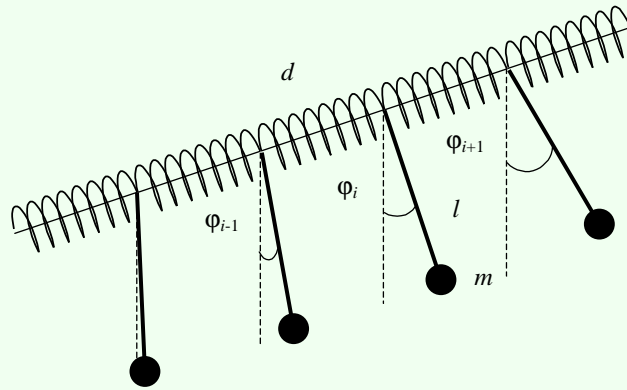


Рис. 5.1. К выводу уравнения синус-Гордона

Получаем уравнение синус-Гордона

$$\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0.$$

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 70 из 80

Назад

Full Screen

Закреть

Выход

5.3. Стационарные решения

5.3.1. Стационарное решение уравнения КдФ

В качестве первого шага при исследовании нелинейных волновых уравнений часто ищут решения в виде стационарных бегущих волн, то есть волн, форма которых не зависит от времени.

Рассмотрим уравнение КдФ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (5.3)$$

Будем искать решение уравнения (5.3) в виде $u = u(\xi)$, где $\xi = x - Ut$, $U = \text{const}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -U \frac{du}{d\xi} = -U u', \quad u_x = u', \quad u_{xxx} = u''''.$$

Здесь и далее штрихи будут означать дифференцирование по новой переменной ξ . Тогда уравнение (5.3) принимает вид

$$-U u' + u u' + \beta u'''' = 0$$

или

$$\beta u'''' + \left(\frac{u^2}{2} - U u \right)' = 0. \quad (5.4)$$

Интегрируя уравнение (5.4), имеем

$$\beta u''' + \frac{u^2}{2} - U u = C.$$

Заменой переменных всегда можно добиться того, чтобы постоянная интегрирования обратилась в 0. Введем новую переменную

$$W = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{u^3}{3} - U u^2 \right).$$

Тогда

$$u'' = -\frac{dW}{du}. \quad (5.5)$$

Мы получили уравнение осциллятора с потенциальной энергией W . Точка $u = 0$ — седло, точка $u = 2U$ — центр (рис. 5.2). Волны малой амплитуды будут иметь форму близкую к синусоидальной. Волны большой амплитуды сильно нелинейны, их называют *кноидальными*¹. Движению по сепаратрисе соответствует уединенная волна — *солитон*.

Получим аналитическое выражение для формы стационарной волны. Для этого проинтегрируем уравнение (5.5):

$$\frac{(u')^2}{2} = E - W(u), \quad (5.6)$$

где постоянная интегрирования E имеет смысл полной энергии осциллятора, а само полученное уравнение — закон сохранения энергии.

Тогда

$$u' = \pm \sqrt{2E - \frac{u^3}{3\beta} + \frac{Uu^2}{\beta}}. \quad (5.7)$$

Пусть в начальный момент времени $u(0) = u_0$ и $u'(0) = 0$. Для определенности будем полагать, что $u_0 > 2U$. Тогда

$$E = -\frac{1}{2\beta} \left(Uu_0^2 - \frac{u_0^3}{3} \right)$$

и уравнение (5.7) принимает вид

$$\sqrt{\beta}u' = \pm \sqrt{U(u^2 - u_0^2) - \frac{u^3 - u_0^3}{3}}$$

¹Название связано с тем, что форма этих волн описывается эллиптическим косинусом Якоби — кноидой.

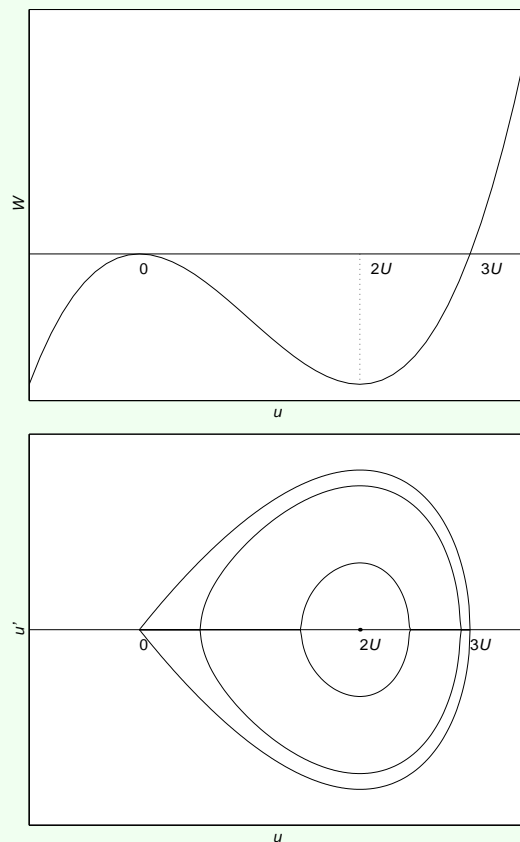


Рис. 5.2. Потенциальная энергия и фазовый портрет уравнения Кортевега–де Фриза в случае стационарных волн

Home Page

Титульная страница

Содержание



Страница 73 из 80

Назад

Full Screen

Закрыть

Выход

или

$$\sqrt{3\beta}u' = \sqrt{(u_0 - u)(u_1 - u)(u_2 - u)}, \quad (5.8)$$

где

$$u_{1,2} = \frac{3U - u_0 \pm \sqrt{3(U + u_0)(3U - u_0)}}{2}.$$

Уравнение (5.8) — уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)(u_1 - u)(u_2 - u)}}. \quad (5.9)$$

Поскольку $u_1 < u < u_0$, представим u в виде

$$u = u_1 + (u_0 - u_1) \cos^2 \varphi = u_1 + a \cos^2 \varphi.$$

Тогда

$$du = -2a \cos \varphi \sin \varphi d\varphi,$$

а подкоренное выражение интеграла в уравнении (5.9) преобразуем отдельно:

$$\begin{aligned} (u_0 - u)(u_1 - u)(u_2 - u) &= \\ &= (u_0 - u_1 - a \cos^2 \varphi)(u_1 - u_1 - a \cos^2 \varphi)(u_2 - u_1 - a \cos^2 \varphi) = \\ &= (a - a \cos^2 \varphi)(-a \cos^2 \varphi)((u_2 - u_1 - a(1 - \sin^2 \varphi)) = \\ &= -a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (u_2 - u_1 - u_0 + u_1 + (u_0 - u_1) \sin^2 \varphi) = \\ &= a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (u_0 - u_2 - (u_0 - u_1) \sin^2 \varphi) = \\ &= a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (u_0 - u_2) \left(1 - \frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_2} \sin^2 \varphi\right) = \\ &= a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (u_0 - u_2) (1 - k^2 \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в уравнение (5.9), имеем

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = \frac{2}{\sqrt{u_0 - u_2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5.10)$$

Откуда

$$\xi = \sqrt{\frac{12\beta}{u_0 - u_2}} F(\varphi; k),$$

где $F(\varphi; k)$ — неполный эллиптический интеграл 1-го рода.

$$u = u_1 + a \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{u_0 - u_2}{12\beta}} \xi; k \right). \quad (5.11)$$

$\operatorname{cn}(x; k) = \cos(\operatorname{am}(x; k))$ — эллиптический косинус Якоби — кноида [10]. $\operatorname{am}(x; k)$ — амплитуда Якоби — функция, обратная к эллиптическому интегралу. Причем $\operatorname{cn}(x; 0) = \cos x$, $\operatorname{cn}(x; 1) = \operatorname{sech} x$ (см. [10]).

Рассмотрим случай малых колебаний вблизи дна потенциальной ямы. Тогда $a = u - u_0 \rightarrow 0$, $u_0 \approx 2U + a/2$, $u_1 \approx 2U - a/2$, $u_2 \approx -U$, $k^2 \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} u &\approx u_1 + a \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{U}{4\beta}} \xi; 0 \right) = u_1 + a \cos^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\beta}} \xi \right) = \\ &= u_1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \sqrt{\frac{U}{\beta}} \xi = 2U + \frac{a}{2} \cos \sqrt{\frac{U}{\beta}} \xi. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Как и следовало ожидать, получено уравнение гармонической волны (рис. 5.3).

Рассмотрим другой предельный случай $k \rightarrow 1$. Тогда $u_0 \approx 3U$, $u_1 = u_2 \approx 0$.

$$u \approx u_1 + a \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{U}{4\beta}} \xi; 1 \right) = 3U \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{U}{4\beta}} \xi. \quad (5.13)$$

Получено решение в виде солитона — уединенной волны — с амплитудой $3U$ и шириной $\sqrt{\frac{4\beta}{U}}$ (рис. 5.3).

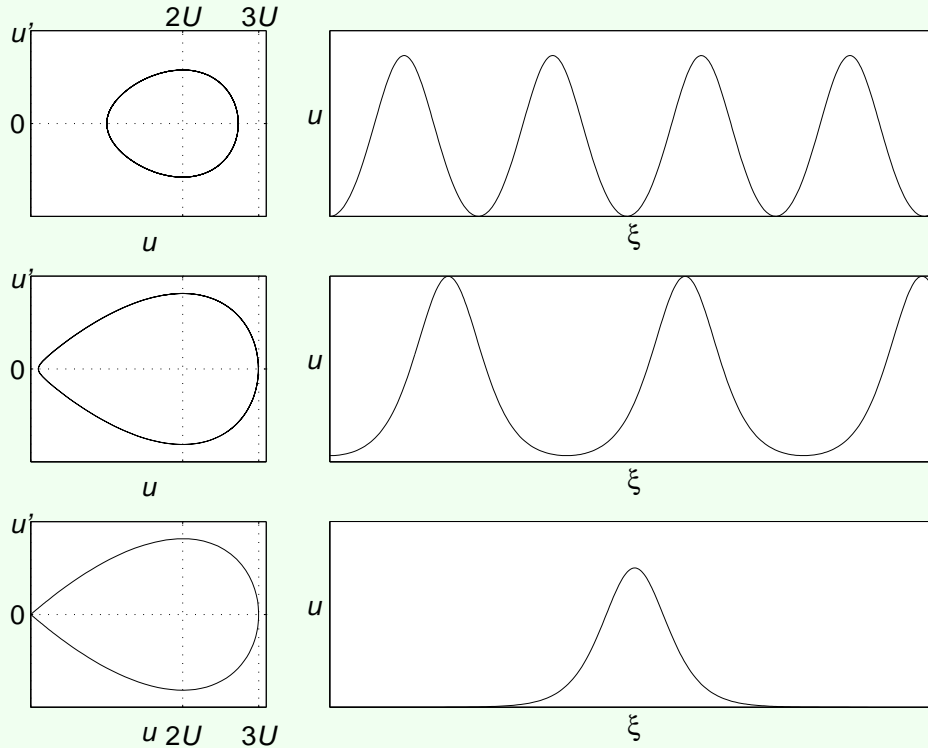


Рис. 5.3. Сверху вниз: слабо несинусоидальная волна, кноидальная волна, солитон

5.3.2. Стационарное решение уравнения синус-Гордона

Найдем солитонное решение уравнение синус-Гордона. Замена $\xi = x - Ut$ приводит к уравнению

$$u'' + \frac{\omega_0^2}{U^2 - c^2} \sin u = 0.$$

Рассмотрим случай $U^2 < c^2$. Тогда

$$W(u) = \frac{\omega_0^2 \gamma^2}{c^2} (\cos u - 1),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Солитону соответствует движение по сепаратрисе, то есть когда полная энергия системы равна 0. Тогда

$$u' = \pm \sqrt{\frac{2\omega_0^2 \gamma^2}{c^2} (\cos u - 1)}.$$

$$\frac{\sqrt{2}\omega_0 \gamma}{c} \xi = \pm \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \cos u}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^u \frac{du}{\sin \frac{u}{2}}$$

Решение уравнения синус-Гордона — *кинк*², описываемый уравнением

$$u_k = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\pm \frac{\omega_0 \gamma}{c} \xi\right). \quad (5.14)$$

Кинк имеет не вполне обычную для солитона форму (рис. 5.4).

²От англ. kink — перегиб.

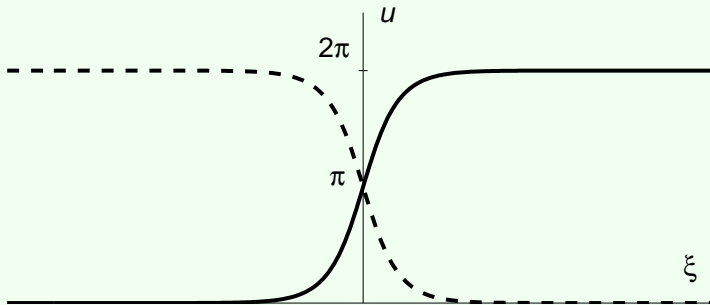


Рис. 5.4. Кинк и антикинк

Величина

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}(u_k(+\infty, t) - u_k(-\infty, t)) \quad (5.15)$$

называется *топологическим зарядом*. Кинки с одинаковыми зарядами отталкиваются, а с противоположными притягиваются. Пара кинков с противоположными зарядами может образовать связанное пульсирующее состояние — *бризер*³.

³От англ. breather — тот, кто дышит; живое существо.

Литература

1. Киттель Ч., Найт В., Рудерман Н. Механика. — М.:Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит., 1983. (Берклевский курс физики.)
2. Крауфорд Ф. Волны. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — Берклевский курс физики.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1964.
4. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. — М.: Физматгиз, 1963.
5. Нерсесов Э. А. Основные законы атомной и ядерной физики. — М.: Высшая школа, 1988.
6. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. — М.: Высшая школа, 1986.
7. Савельев И. В. Курс общей физики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — т. 3.
8. Сивухин Д. В. Электричество. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — Общий курс физики.

[Home Page](#)

[Титульная страница](#)

[Содержание](#)

[◀◀](#)

[▶▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

[Страница 79 из 80](#)

[Назад](#)

[Full Screen](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)

9. Калашников С.Г. Электричество. — М.:Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит-ры, 1985.
10. Справочник по специальным функциям. Под. ред. М.Абрамовица и И.Стиган. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979.

[Home Page](#)

[Титульная страница](#)

[Содержание](#)



[Страница 80 из 80](#)

[Назад](#)

[Full Screen](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)